



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Dynamique des fluides

Présentée et soutenue par :

M. MOHAMMED KHARROUBA

le vendredi 18 décembre 2020

Titre :

Etude analytique et numérique des efforts s'exerçant sur des particules
cylindriques allongées.

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur(s) de Thèse :

M. JACQUES MAGNAUDET

Rapporteurs :

M. ANTHONY WACHS, UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA VANCOUVER

M. MICHEL LANCE, ECOLE CENTRALE DE LYON

Membre(s) du jury :

MME PATRICIA ERN, CNRS TOULOUSE, Président

M. DIEGO LOPEZ, INSA LYON, Membre

M. JACQUES MAGNAUDET, CNRS TOULOUSE, Membre

M. JEAN LOU PIERSON, IFPEN, Membre

MME RIM BRAHIM, IFPEN, Invité(e)

Résumé

La simulation numérique d'un lit fluidisé de particules cylindriques (catalyseurs) est complexe. Néanmoins, avec un modèle multi-Eulérien, la modélisation du réacteur est possible mais nécessite des lois de fermetures adaptées, notamment pour les efforts (forces et moments) hydrodynamiques. Ce travail vise à obtenir des expressions de ces efforts via la simulation numérique directe permettant la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Deux configurations sont abordées : l'écoulement uniforme autour d'une particule cylindrique fixe et inclinée, et la rotation d'un cylindre dans un fluide au repos. L'étude de la première configuration permet de proposer des lois de forces de traînée, portance et de moment en fonction des paramètres adimensionnels gouvernant le problème (le nombre de Reynolds, le rapport de forme du cylindre et l'angle d'inclinaison par rapport à la direction de l'écoulement). La gamme de nombre de Reynolds balayée va des écoulements allant du régime visqueux aux premiers régimes de transition dans le sillage. Dans les régimes visqueux, nos résultats sont comparés à la théorie des corps allongés que nous modifions pour qu'elle soit valable aux petits rapports de forme. Une loi empirique est aussi proposée pour des nombres de Reynolds modérés, $Re \leq 10$. En régime inertiel, de nombreux types de sillages sont observés et sont cartographiés en fonction des paramètres adimensionnels. Pour toute inclinaison $\theta \neq 0^\circ$ à $Re \leq 330$, une paire de tourbillons contra-rotatif est observée pour tous les rapports de forme étudiés. Dans ce régime, pour des Re assez grands, une zone de recirculation est observée sur la partie amont de la surface latérale du cylindre. Cette structure a une importante influence sur l'écoulement près du cylindre ainsi que sur la distribution des contraintes visqueuses sur la surface latérale. En augmentant l'angle d'inclinaison, des lâchers tourbillonnaires de type "épingle à cheveux à double orientation" sont observés dans le sillage du cylindre, avant qu'un autre régime apparaisse, se caractérisant par des lâchers de tourbillons de type "épingle à cheveux à orientation fixe" à des grands angles d'inclinaison. Une grande influence des sillages est constatée sur les efforts exercés sur le cylindre. Des modèles d'efforts basés sur nos résultats numériques sont proposés. Il s'avère que la force perpendiculaire à l'axe du cylindre suit une simple loi linéaire en fonction de l'inclinaison, tandis que la force axiale et le moment suivent des lois complexes dépendant des paramètres de contrôle.

La deuxième partie de la thèse s'intéresse à la rotation uniforme d'un cylindre dans un fluide au repos, configuration jusque-là non étudiée dans la littérature. En régime de Stokes, nos résultats sont comparés avec la théorie des corps allongés valable pour des grands rapports de forme, et que nous prolongeons empiriquement pour les petits rapports de forme. En régime inertiel, une loi de moment est proposée, prenant en compte l'influence du rapport de forme et du

nombre de Reynolds. Les contributions visqueuses au moment ont une décroissance en $1/\sqrt{Re}$ comme le prédit la théorie de la couche limite. Par symétrie de l'écoulement, les contraintes visqueuses sur les deux disques du cylindre ne contribuent pas au moment total contrairement aux contributions de pression. Toujours dans ce régime, un seul type de sillage est observé : Il s'agit de deux paires de tourbillons contra-rotatifs générées aux deux extrémités du cylindre. Enfin, la zone de fluide perturbée par la rotation du cylindre est aussi examinée.

Abstract

The flow past rodlike cylindrical fibers with circular cross section is involved in many industrial and natural processes, such as bubbling fluidized beds, pulp and paper making or the sedimentation of ice crystals in clouds. Despite the large number of studies devoted to the flow past a circular cylinder held perpendicular to the incoming flow in the laminar and transitional regimes, much less is known when the body is arbitrarily inclined or even aligned with this incoming flow. In the first part of this thesis, the flow past a finite-length circular cylinder, the axis of which makes some angle with the uniform incoming flow, is studied numerically from creeping-flow conditions to the first non-stationary regimes. Three dimensionless parameters then govern the problem when the upstream flow is steady and uniform : the aspect ratio χ , the inclination angle θ which is the angle between the cylinder axis and the incoming velocity, and the Reynolds number. The investigation focuses on the way these parameters affect the flow structure past the body, the transition mechanisms in the wake and the hydrodynamic loads up to $Re = 400$. In the specific case where the cylinder is aligned with the upstream flow, influence of the aspect ratio and inertial effects in the low-to-moderate Reynolds number regime is examined by comparing numerical results with theoretical predictions provided by the slender-body approximation. When the cylinder is inclined with respect to the incoming flow and inertial effects are dominant, three distinct types of vortex patterns, all preserving a symmetry plane, are observed in the wake past cylinders with aspect ratios in the range 3–7, depending on Re and χ . The wake structure involves a steady pair of counter-rotating streamwise vortices up to $Re = 330$. In this regime, for large enough Re and θ , an open separation region emanating from the leading edge takes place along the upstream part of the lateral surface of the cylinder. This structure has a deep influence on the flow structure in the vicinity of the body and on the surface stress distribution. Beyond $Re \approx 330$, increasing the inclination angle first leads to a regime in which double-sided hairpin-shaped vortices are shedded downstream, while another regime characterized by the shedding of single-sided hairpin vortices takes over for large enough inclinations. Based on the numerical results, drag, lift and torque approximate models valid in the range $20 \leq Re \leq 400$ are built for inclined cylinders of arbitrary aspect ratio. While the force perpendicular to the cylinder axis follows a remarkably linear law, the axial force and the torque are found to exhibit complex dependencies with respect to the three control parameters.

In the second part, we investigate the torque on a finite-length cylinder rotating perpendicularly to its axis of symmetry. The ratio of the length of the cylinder to its diameter varies from 1 to 15. In the creeping flow regime, we find a good agreement with the slender body theory for sufficiently long cylinders. For shorter cylinders, we propose a modification of the

theory which matches well the numerical results. In inertia-dominated regimes, a noticeable wake develops, made of two pairs of counter-rotating vortices. We show that, due to symmetry properties, the upstream and downstream disks do not contribute to the shear-induced torque on the body. However, the pressure contribution of the two disks are significant and cannot be neglected particularly for short cylinders. We show that the shear stress on the lateral part of the body varies as the inverse of the square root of the Reynolds number, as predicted by the boundary layer theory. Based on the previous observations, we present an empirical formula for the torque which matches well the numerical results over the entire range of Reynolds number and aspect ratio studied here.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon jury de thèse pour leur évaluation de mes travaux, ainsi que pour les discussions qui ont suivi ma présentation lors de ma soutenance. En particulier, je suis reconnaissant à Anthony Wachs et Michel Lance pour leur lecture détaillée de mon manuscrit de thèse, ainsi qu'à Patricia Ern pour avoir présidée le jury.

Je tiens vivement à remercier mon directeur de Thèse, Jacque Magnaudet ainsi que mon encadrant Jean-lou Pierson. Leur soutien a été pour moi, un élément essentiel de motivation. Je suis entièrement reconnaissant de vos compétences scientifiques, et des précieux conseils que vous m'avez transmis pendant le déroulement de ce travail. Plus particulièrement, je vous remercie de votre disponibilité durant la thèse (même les week-end vous avez été toujours là), votre patience, vos qualités humaines et votre écoute permanente. Aux moments difficiles vous avez été toujours là. Merci de vous être tant impliquées pour que ma thèse se déroule bien, et d'avoir toujours été présents lorsque j'en avais besoin. Votre encadrement a été exemplaire.

Je suis également reconnaissant à Rim Brahem pour avoir participé à la naissance de ce projet de thèse, et pour m'avoir aidé à comprendre le contexte industriel de la thèse. J'adresse également mes remerciements à Annaig Pedrono pour m'avoir apporté son aide sur les différents problèmes numériques que j'ai rencontrés avec JADIM. Par la suite, je remercie également Thomas Bonometti de m'avoir accueilli sur son quota d'heures de calcul CALMIP.

Je remercie l'IFPEN et l'IMFT pour l'accueil que j'ai reçu, ainsi que pour les importants moyens techniques qui ont été mis à ma disposition. Je souhaite remercier l'ensemble des personnes de l'IFP Energies Nouvelles que j'ai pu côtoyer durant ces dernières années. En particulier, l'équipe du département Mécanique Appliquée et Mécanique des fluides de Solaize pour les bons moments passés en leur compagnie et l'atmosphère de travail agréable. J'adresse une pensée particulière à Constance, Adrien et Marwa pour leur soutien sans faille, et les moments chaleureux passés ensemble. Merci Constance pour nos échanges durant nos trajets du quotidien.. Merci pour ton amitié.

Enfin, j'adresse ma profonde reconnaissance à mes parents, à ma sœur Imane, à ma bien aimée Rabia, pour leur soutien et tout ce qu'ils ont fait pour que ce travail soit réalisé.

Table des matières

1. Introduction	1
1.1. Contexte général	1
1.1.1. Le procédé H-OIL	1
1.1.2. La fabrication du papier	3
1.1.3. Les processus environnementaux	4
1.1.4. Objet de la thèse	4
1.2. Etat de l'art	5
1.2.1. Efforts sur les particules solides	5
1.2.2. Sillage et structure de l'écoulement	9
1.3. Objectifs et structure du manuscrit	17
2. Méthodologie numérique	19
2.1. Les équations de conservation	19
2.2. Discrétisation spatiale et temporelle des équations	19
2.2.1. Discrétisation spatiale	19
2.2.2. Discrétisation temporelle	20
2.3. Formulation des équations dans le cas d'un objet en translation et rotation imposées	22
2.3.1. Résolution numérique	22
2.3.2. Calcul des efforts sur l'objet	23
2.4. Validation	23
2.4.1. Ecoulement stationnaire uniforme sur un cylindre incliné	23
2.4.2. Rotation forcée d'un cylindre dans un fluide au repos	27
3. Flow structure and loads over inclined cylindrical rodlike particles and fibers	31
3.1. Introduction	32
3.2. Numerical methodology	33
3.3 Cylinder aligned with the upstream flow	34

3.4 Forces and torque on a moderately inclined cylinder at low-to-moderate Reynolds number	40
3.5 Fully inertial stationary regime	42
3.6 Summary and concluding remarks	49
4. Rotation forcée d'un cylindre perpendiculairement à son axe de symétrie dans un fluide au repos	59
4.1. Des petits nombres de Reynolds $Re \ll 1$ aux nombres de Reynolds modérés $Re \sim 1$	59
4.1.1. Dynamique à petit nombre de Reynolds ($Re \ll 1$)	60
4.1.2. Des petits nombres de Reynolds aux nombres de Reynolds modérés . . .	65
4.2. Dynamique à grand nombre de Reynolds	68
4.2.1. Écoulement autour du cylindre en rotation	68
4.2.2. Forces hydrodynamiques à grand nombre de Reynolds	75
4.2.3. Moment hydrodynamique à grand nombre de Reynolds	77
5. Conclusions et perspectives générales	81
5.1. Conclusions	81
5.2. Perspectives	83
A. Annexe A	85
B. Bibliographie	97

1. Introduction

1.1. Contexte général

1.1.1. Le procédé H-OIL

Depuis quelques années, les raffineries ont commencé à subir des déséquilibres forts en termes d'offre et de demande de produits pétroliers, dus à l'exploitation de pétrole de plus en plus lourd. Cette problématique a conduit à la recherche et au développement de nouveaux procédés de raffinage qui permettent de valoriser les résidus pétroliers de faible valeur commerciale.

Le procédé H-Oil est un procédé d'hydro-conversion des bruts lourds en lit bouillonnant. Il permet de convertir les charges lourdes pendant une durée de cycle importante. La technologie du lit bouillonnant assure à la fois un mélange parfaitement agité et une perte de charge constante pour de longues périodes de fonctionnement. Contrairement au lit fixe où les catalyseurs sont immobiles, dans un lit bouillonnant ils sont libres de se déplacer dans le réacteur. La figure 1.1 présente le schéma d'un réacteur lit bouillonnant H-OIL sur lequel nous pouvons distinguer trois phases. Une phase liquide dominante composée principalement des hydrocarbures, une phase gazeuse qui est constituée d'un mélange d'hydrocarbure et d'hydrogène injecté, et une phase solide représentée par les catalyseurs. Le catalyseur typiquement utilisé pour ce procédé est du nickel-molybdène, sous forme d'extrudé cylindrique (peu courbé) de diamètre 0.8mm et de longueur variable. Ces catalyseurs interagissent avec les phases liquide et gazeuse mais aussi entre eux. L'interaction entre catalyseurs et la chaleur générée dans le réacteur par la réaction chimique, peuvent entraîner une modification des propriétés physiques des particules solides, ainsi que leurs tailles. Ce procédé fonctionne à haute température 410 – 440°C et à haute pression 100 – 200 bars, afin d'obtenir une pression partielle de sortie en hydrogène suffisante pour une bonne hydrogénation. Le débit du liquide recyclé dans le réacteur permet de contrôler la hauteur du lit catalytique expansé. La technologie du lit bouillonnant est très complexe dans le sens où elle englobe des phénomènes chimiques, thermodynamiques et hydrodynamiques. L'amélioration donc de ce type de procédé nécessite une étude locale pour chaque domaine cité. Cette thèse se focalise uniquement sur la partie hydrodynamique, et particulièrement sur

l'interaction fluide-particule.

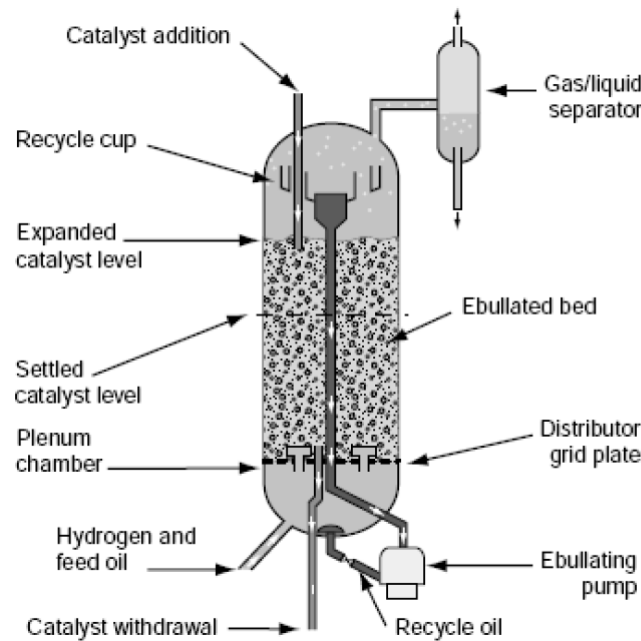


Figure 1.1. – Schéma représentatif d'un réacteur H-OIL (Masliyah, 1972).

L'hydrodynamique de ce procédé est multi-échelle et complexe, depuis la petite particule cylindrique jusqu'à l'ensemble des particules fluidisées dans un réacteur qui mesure une dizaine de mètres de hauteur. Les paramètres hydrodynamiques de contrôle du réacteur (hauteur du lit, perte de charge...) sont donc dépendants du catalyseur utilisé (forme, masse volumique, taille caractéristique). Un changement du catalyseur employé nécessite une bonne compréhension de son influence sur l'hydrodynamique de l'écoulement. Il est possible de mener une étude expérimentale à travers des campagnes d'essais sur des unités pilotes mais elles sont coûteuses. La CFD permet de compléter une démarche expérimentale ciblée et apporte plus de clarté en ce qui concerne l'hydrodynamique des écoulements autour de catalyseurs cylindriques de différentes tailles. Cependant, la présence d'écoulements tri-phasiques dans le réacteur rend la modélisation multi-échelle encore plus complexe. Le modèle multi-Eulérien où les trois phases sont considérées comme continues, peut être adapté à cette problématique. Cependant, cette approche nécessite des lois de fermeture adaptées, notamment les forces hydrodynamiques, afin de pouvoir simuler un lit fluidisé en grande échelle. D'où le besoin d'étudier dans un premier temps l'interaction hydrodynamique fluide-particule, afin de fournir des lois de fermeture qui pourront être implémentées dans des modèles multi-Euleriens à plus grande échelle.

Dans ce lit, outre le mouvement de translation, les particules non-sphériques subissent aussi un mouvement de rotation dû aux collisions particule-particule. Cette rotation a un impact conséquent sur l'écoulement, notamment dans le cas d'une rotation rapide où l'effet Magnus

n'est pas négligeable (Liu *et al.*, 2018). Tout près du flux d'injection, les particules sphérocyllindriques tendent à s'aligner avec la direction de l'écoulement et se comportent comme un seul bloc solide (Mema *et al.*, 2019). Ces auteurs ont montré que plus on s'éloigne de la zone d'injection, plus les particules s'inclinent par rapport à la direction de l'écoulement et tendent vers une position où l'axe de symétrie est perpendiculaire à la vitesse d'injection.

Dans le contexte du lit fluidisé, on considère un cylindre de diamètre D , de longueur L et de masse volumique ρ_c dans un fluide de masse volumique ρ_f et de viscosité cinématique $\eta = \mu/\rho_f$. Quatre paramètres adimensionnels gouvernent le problème physique à savoir : le rapport de forme L/D , le rapport des masses volumiques ρ_c/ρ_f , la fraction volumique du solide α_s , et le nombre d'Archimède $Ar = (\sqrt{\frac{\rho_c - \rho_f}{\rho_f}} g D) D / \eta$. Dans le cadre du procédé H-OIL utilisé à l'IFPEN, ces paramètres adimensionnels peuvent être évalués comme le montre le tableau 1.1 :

Paramètres adimensionnels	Procédé H-OIL
Ar	200 - 800
ρ_c/ρ_f	2 - 3
L/D	2 - 10
α_s	≈ 0.5

Table 1.1. – Estimation des paramètres adimensionnels du procédé H-OIL selon les données de l'IFPEN.

1.1.2. La fabrication du papier

En dehors du procédé H-OIL, comprendre l'interaction fluide-particule cylindrique allongée peut être utile dans l'étude de la sédimentation des fibres dans un fluide, phénomène rencontré dans l'industrie comme dans la nature. Dans l'industrie, on peut citer par exemple les procédés de fabrication de la pâte à papier et du papier (Lundell *et al.*, 2011), et les procédés pharmaceutiques (Erni *et al.*, 2009). On prend l'exemple de la fabrication du papier qui est essentiellement une feuille formée de fibres auxquelles on incorpore un certain nombre de produits chimiques qui déterminent les propriétés et la qualité de la feuille. Outre les fibres et les produits chimiques, la fabrication de la pâte et du papier nécessite de grandes quantités d'eau. La pâte servant à la fabrication du papier peut être produite à partir de fibre vierge ou bien obtenue par la retransformation de vieux papiers en pâte. La première étape dans la fabrication du papier a lieu dans un grand récipient cylindrique tournant à grande vitesse, appelé pulpeur, où les fibres sont mises en suspension dans l'eau, avant de passer par les trois processus essentiels : le formage, le pressage et le séchage (Holm, 2005). En moyenne, le rapport de forme des fibres utilisées dans ce processus est de l'ordre de 100, avec une vitesse d'injection d'eau de l'ordre de 20m/s (Olson *et al.*, 2009). Holm et Söderberg (2007) ont montré que les fibres près de la paroi

ont tendance à s’orienter perpendiculairement à l’écoulement tandis que celles situées plus loin de la paroi sont parallèles à l’écoulement.

1.1.3. Les processus environnementaux

Dans la nature, on rencontre le processus de sédimentation des cristaux de glace dans les nuages, où les effets de l’interaction fluide-particule sont importants (Pruppacher et Klett, 2010). Des cristaux de glaces ont été observés dans les nuages pour la première fois par Weickmann (1945). Ces cristaux chutent dans l’atmosphère, à des vitesses différentes. Les différences de vitesses de sédimentation entraînent des contacts entre les cristaux de glace, ce qui peut provoquer des collisions (un champ électrique favorise l’agrégation de cristaux de formes allongées), ou bien les cristaux continuent leurs chutes respectives individuellement. Les nuages qui sont composés en grande partie de cristaux de glace et ont une extension verticale d’une dizaine de kilomètres et une extension horizontale de plusieurs centaines de kilomètres. Leurs vitesses verticales peuvent dépasser les 20 m/s, apportant de grandes quantités de glace dans la haute troposphère (Fontaine, 2014). Ces grandes quantités de glaces affectent le bon fonctionnement des moteurs d’avions, pouvant entraîner leur arrêt et dans certains cas leur chute.

1.1.4. Objet de la thèse

Dans toutes ces configurations, et quelque soit la particule solide étudiée, il y a toujours une perturbation induite sur le fluide par la présence de la particule solide (obstacle). Dans notre cas d’étude, il est important d’examiner l’influence de la présence d’une particule cylindrique sur la dynamique de l’écoulement. Ce travail de thèse s’intéresse principalement aux efforts subis par une particule cylindrique dans deux configurations différentes. La première consiste à placer la particule fixe et inclinée dans un écoulement uniforme dans le but de tirer des lois de forces/moments en fonction des paramètres adimensionnels gouvernant la physique du problème. Ensuite, la rotation uniforme de la particule dans un fluide au repos est examinée afin de proposer un modèle de moment valable pour des particules de rapport de forme semblables à ceux utilisés dans le procédé H-OIL (voir tableau 1.1). Grâce à cette étude, on examine l’ensemble des mouvements d’une particule cylindrique dans un lit fluidisé à savoir la translation et la rotation (le couplage translation-rotation n’est toutefois pas considéré). Les modèles de forces/moments proposés pourront être utilisés pour simuler un lit fluidisé comprenant un ensemble de particules cylindriques, à condition que leurs interactions directes soient négligeables.

1.2. Etat de l'art

Cette section traite dans un premier temps des efforts sur des particules solides, puis des instabilités apparaissant dans leurs sillages.

1.2.1. Efforts sur les particules solides

Efforts sur une particule sphérique fixe dans un écoulement uniforme

a) Formulation théorique

Une des configurations les plus étudiées dans la littérature est celle d'un écoulement autour d'une particule sphérique. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette configuration d'un point de vue théorique, expérimentale et numérique. Le premier résultat connu est attribué à [Stokes \(1851\)](#), qui a montré que la force de traînée exercée par le fluide sur une sphère à $Re = 0$ est donnée par $\mathbf{F}_d = 6\pi\mu a\mathbf{U}$, où a est le rayon de la sphère, μ la viscosité du fluide, et \mathbf{U} la vitesse du fluide à l'infini. Il faut noter que cette solution de Stokes n'est valable que pour $Re = 0$. Pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité, [Oseen \(1910\)](#) améliore la solution de Stokes pour proposer une nouvelle loi de traînée qui prend en compte le nombre de Reynolds $\mathbf{F}_d = 6\pi\mu a\mathbf{U}(1 + 3/16Re)$. Il s'avère que l'estimation des termes d'inertie près de la sphère par la solution d'Oseen est erronée. Cette solution a été améliorée par [Proudman et Pearson \(1957\)](#) en utilisant la méthode de développements asymptotiques raccordés, qui ont obtenu l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_d = 6\pi\mu a\mathbf{U}\left(1 + \frac{3}{16}Re + \frac{9}{160}Re^2 \ln Re + O(Re^2)\right). \quad (1.1)$$

b) Formulation semi-empirique

Néanmoins, l'approximation (1.1) reste aussi limitée, elle diverge rapidement en Re par comparaison aux résultats expérimentaux en régime inertiel ([Roos et Willmarth, 1971](#)). Les expériences et les simulations numériques ont pu corriger ces divergences en proposant des lois empiriques comme celle proposée par [Schiller \(1933\)](#) $C_d = 24/Re(1 + 0.15Re^{0.687})$, où $C_d = |\mathbf{F}_d|/(1/2\rho\pi a^2 U^2)$.

Efforts sur une particule cylindrique fixe dans un écoulement uniforme

Dans cette partie, on s'intéresse aux différents travaux focalisés sur les efforts exercés sur un cylindre fixe en écoulement stationnaire.

a) Etudes à petit nombre de Reynolds

[Batchelor \(1970\)](#) a donné une expression approchée de la force de traînée exercée sur un cylindre très allongé perpendiculaire ou aligné avec l'écoulement. Cette expression est basée sur la théorie des corps allongés et n'est valable qu'en régime de Stokes. Si le cylindre est incliné par rapport à l'écoulement, la linéarité des équations de Stokes implique :

$$C_d = C_{d_{\theta=0^\circ}} + (C_{d_{\theta=90^\circ}} - C_{d_{\theta=0^\circ}}) \sin^2 \theta. \quad (1.2)$$

$C_{d_{\theta=0^\circ}}$ et $C_{d_{\theta=90^\circ}}$ sont les coefficients de traînée pour le cylindre aligné et perpendiculaire respectivement. [Sanjeevi et Padding \(2017\)](#) ont montré que la loi (1.2) est valable pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 2000. Ils ont montré que cette loi est due à une certaine distribution de pression qui contribue à la force de traînée à grand Re . Ils ont aussi trouvé que la traînée visqueuse est indépendante de l'angle d'inclinaison du cylindre à grand Re .

a) Principe d'indépendance

Dans le cadre de la théorie de la couche limite, [Sears \(1948\)](#) a prouvé théoriquement qu'un cylindre infiniment long incliné d'un angle θ par rapport à un écoulement de vitesse U perpendiculaire à son axe subit la même force qu'un cylindre aligné avec un écoulement de vitesse $U \sin \theta$; c'est ce qu'on appelle le "Principe d'Indépendance". Ce principe permet de déterminer la force normale sur le cylindre dans une large gamme d'angles d'inclinaison et de grands nombres de Reynolds. Ainsi dans un régime fortement inertiel, les lois de traînée et de portance données par le principe d'indépendance s'écrivent :

$$C_d \approx C_{d_{\theta=90^\circ}} \sin^3 \theta$$

$$C_l \approx C_{d_{\theta=90^\circ}} \sin^2 \theta \cos \theta$$

a) Formulation semi-empirique

[Rosendahl \(2000\)](#) a pris en compte la force de traînée exercée sur un cylindre aligné dans la loi de traînée basée sur le principe d'indépendance, ce qui conduit à $C_d = C_{d_{\theta=0^\circ}} + (C_{d_{\theta=90^\circ}} - C_{d_{\theta=0^\circ}}) \sin^3 \theta$. [Pierson et al. \(2019\)](#) ont montré que cette loi ne suit pas leurs résultats numériques, elle est moins précise que la loi basée sur la linéarité des équations de Stokes. Ils ont proposé d'autres lois en estimant la valeur du coefficient de traînée à $\theta = 0^\circ$ à $1/2 C_{d_{\theta=90^\circ}}$. Dans la même optique, [Vakil et Green \(2009\)](#) se sont intéressés à l'étude d'un cylindre incliné pour différents rapports de forme $2 < \chi < 20$, à différents angles d'inclinaison, $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Les

simulations numériques ont été réalisées pour $Re \in [1; 40]$. Il s'est avéré que le rapport $\frac{C_l}{C_d}$ atteint une valeur maximale pour $40^\circ < \theta < 50^\circ$. Les principaux résultats de cette étude sont les suivants :

1. Au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison diminue, le sillage disparaît et à bas nombre de Reynolds ($Re = 1$) l'écoulement ne contient pas de région de séparation de l'écoulement.
2. A $Re = 40$, la pression est constante sur la ligne d'arrêt. La portance augmente quand θ augmente jusqu'à 45° , puis diminue jusqu'à s'annuler quand θ continue à augmenter pour atteindre 90° . On constate aussi que le maximum de C_l diminue avec θ pour de petits rapport de forme à grand nombre Reynolds.
3. La variation de la pression le long de l'axe du cylindre donne naissance à un couple sauf pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$.
4. La pression à l'arrière du cylindre est plus importante quand celui ci est peu incliné, et inversement pour la pression frontale.

Un résultat important de cette étude est que le coefficient de portance ne dépend plus du rapport de forme à partir de $\chi = 10$.

Le seul travail qui s'intéresse au mouvement des fibres allongées de manière analytique en régime inertiel est celui de [Khayat et Cox \(1989\)](#), qui ont étudié une fibre allongée en translation dans un fluide avec une orientation fixe. Dans la limite $\chi \gg 1$, l'écoulement pour ce problème est régi par l'équation d'Oseen forcée par une distribution linéique de forces, et la détermination analytique du couple devient possible pour $Re = O(1)$. Les auteurs ont montré que l'asymétrie de la solution d'Oseen conduisait à un couple non nul à un nombre de Reynolds modéré pour toutes les orientations de la fibre, sauf quand celle-ci est en translation longitudinale ou transversale. En régime inertiel la fibre a donc tendance à s'orienter transversalement pour tout Re , compte tenu de l'asymétrie amont-aval des champs de vitesse associés.

Efforts sur une particule sphérique en rotation forcée dans un fluide au repos

a) Résultats à petit nombre de Reynolds

La rotation forcée d'une sphère dans un fluide au repos a été largement étudiée, notamment pour la prédiction du moment hydrodynamique exercé par le fluide sur la sphère. Cet écoulement est caractérisé par le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation de la sphère $Re = \rho\Omega a^2/\mu$. Pour les régimes faiblement inertiels, le problème a été résolu par Kirchhof(1875) qui a donné une première expression du moment valable pour $Re \ll 1$: $\mathbf{M} = -8\pi\mu a^3\mathbf{\Omega}$, où $\mathbf{\Omega}$ la vitesse de rotation de la sphère. Pour des régimes modérément inertiel ($Re < 10$), [Takagi](#)

(1977) donne une expression du moment basé sur la méthode des développements asymptotiques raccordés :

$$C_M = \frac{16}{Re} \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{Re}{10} \right)^2 + 0.00754 \left(\frac{Re}{10} \right)^4 + 0.00535 \left(\frac{Re}{10} \right)^6 + O(Re^8) \right), \text{ où } C_M = |\mathbf{M}| / (1/2 \rho \pi a^5 \Omega^2)$$

a) Résultat semi-empirique

Pour des régimes plus inertiels ($Re > 10$), grâce à la voie numérique, le couple peut être approché par des expressions empiriques. On peut utiliser par exemple celle proposée par Dennis *et al.* (1980) : $C_M = \frac{1}{\pi} (6.45 Re^{-1/2} + 32.1 Re^{-1})$, qui reproduit bien les résultats expérimentaux de Sawatzki (1970). A grand nombre de Reynolds, les résultats numériques de Dennis *et al.* (1980) vérifient bien les prédictions de la théorie de la couche limite.

Efforts sur une particule cylindrique en rotation forcée dans un fluide au repos

a) Cylindre en rotation autour de son axe de symétrie

La rotation d'un cylindre fini dans un fluide au repos a été peu abordée dans la littérature, contrairement au cas de la rotation de la sphère. A notre connaissance, seul le régime à bas nombre de Reynolds a été traité. Chan *et al.* (1986) ont étudié la rotation uniforme d'un cylindre autour de son axe de symétrie dans un fluide au repos en régime de Stokes, et ont proposé grâce à une solution asymptotique, une expression du moment exercé par le fluide sur le cylindre en fonction du rapport de forme. Il s'avère que le moment exercé sur un cylindre fini et allongé est moins important que sur un cylindre infiniment long.

b) Cylindre en rotation autour d'un axe perpendiculaire à son axe de symétrie

Dans cette configuration, nous nous contentons de citer l'article de Batchelor (1970) qui est l'une des seules références proposant le calcul analytique du moment exercé sur le cylindre en régime de Stokes. En se basant sur la théorie des corps allongés, Batchelor (1970) obtient l'expression du moment : $M = \frac{8}{3} \pi \mu \Omega L^3 \left(\frac{\epsilon(1-\epsilon H_{21})}{1-\epsilon/2} + \epsilon^3 (H_{22} - H_{21}/2) \right)$, où $2L$ est la longueur du cylindre, H_{ij} sont des coefficients numériques, $\epsilon = [\ln(4L/D)]^{-1}$, et Ω est la vitesse de rotation. A notre connaissance, il n'y a pas eu d'étude sur la rotation du cylindre en régime inertiel, ce qui nous motive à examiner cette configuration.

1.2.2. Sillage et structure de l'écoulement

Instabilités dans le sillage d'une sphère placée dans un écoulement stationnaire

Lorsqu'on place une sphère dans un écoulement stationnaire uniforme, l'analyse dimensionnelle montre que le sillage ne dépend que du nombre de Reynolds ($Re = \frac{UD}{\eta}$ avec U la vitesse du fluide à l'infini, η sa viscosité cinématique et D le diamètre de la sphère). Ormières et Provansal (1999) ont étudié expérimentalement le sillage d'une sphère fixe dans un écoulement uniforme. Ils ont observé deux bifurcations : la première mène au régime stationnaire non axisymétrique avec l'apparition de deux tourbillons contrarotatifs. La deuxième donne naissance à un régime instationnaire périodique au delà de $Re_c \approx 280$. Dans ce régime instationnaire, le sillage oscille périodiquement et des lâchers de tourbillons de type "épingle à cheveux" sont observés.

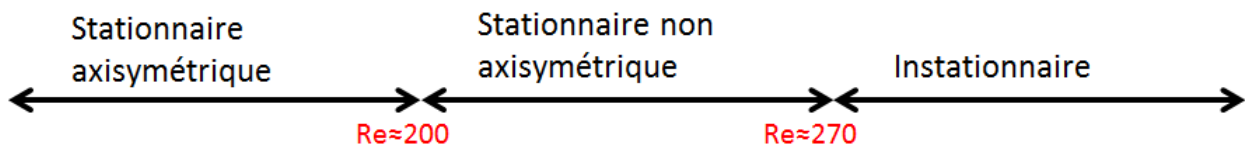


Figure 1.2. – Diagramme des régimes d'instabilité (Johnson et Patel, 1999).

Les études numériques autorisent un contrôle plus précis des paramètres de l'écoulement et elles permettent ainsi d'accéder à une analyse plus fine des bifurcations. L'une des premières références dans le cas de la sphère est l'article de Johnson et Patel (1999) qui ont étudié l'écoulement laminaire autour d'une sphère en régime stationnaire et instationnaire pour un nombre de Reynolds $25 < Re < 300$. Ils ont mis en évidence les trois régimes observés expérimentalement comme l'illustre la figure 1.2. Le régime axisymétrique stationnaire subsiste jusqu'à $Re \approx 210$. Au delà de ce nombre de Reynolds, le régime stationnaire non-axisymétrique fait apparition jusqu'à $Re \approx 272$. Ceci est en accord avec les travaux expérimentaux. Enfin, la transition vers le régime instationnaire a été détectée à $Re \approx 272$. Les auteurs font savoir que l'instabilité de l'écoulement est liée à la génération d'un anneau de faible pression due à une accélération radiale au centre du tourbillon (car la pression y est minimale).

Prządka *et al.* (2008) explorent une gamme de nombre de Reynolds compris entre 250 et 310. Le choix de cet intervalle est basé sur les résultats expérimentaux de Magarvey et Bishop (1961) qui obtiennent un nombre de Reynolds critique $Re_c = 265$ pour le passage à l'instationnarité et l'apparition de tourbillons en "épingle à cheveux" conservant un plan de symétrie. Pour $Re > 300$, le lâcher tourbillonnaire change de caractère et on observe un grand tourbillon en "épingle à cheveux" suivi de deux petits tourbillons du même type. Avant la seconde bifurcation (instationnaire), deux tourbillons contrarotatifs sont observés dans le sillage tout qui conserve

un plan de symétrie (figure 1.3).



Figure 1.3. – Deux tourbillons contrarotatifs pour $Re = 250$ (Prządka *et al.*, 2008).

La figure 1.3 donne l'impression que la forme du tourbillon est circulaire et qu'il est petit devant la taille de la sphère. Cependant, la PIV indique le contraire. En effet, le tourbillon prend une forme elliptique et le maximum de vorticité n'est pas atteint au centre du tourbillon mais près du plan de symétrie. Cette observation met en évidence l'existence d'une interaction entre les deux tourbillons.

Sillage d'un disque mince en écoulement stationnaire uniforme

a) Disque aligné

De même que la sphère a fait l'objet de beaucoup d'études, l'écoulement autour du disque fixe a fait l'objet de plusieurs investigations numériques et expérimentales. Les scénarios de bifurcation dans le sillage d'un disque normal ou parallèle à l'écoulement dépendent de deux paramètres clés : le nombre de Reynolds, et le rapport de forme. Par la voie expérimentale, à l'aide de la technique PIV, Szaltys *et al.* (2012) ont étudié le sillage du disque pour un intervalle de nombre de Reynolds $50 < Re < 500$. Il s'est avéré qu'à partir de $Re > 125$ l'axisymétrie est perdue et deux tourbillons contra-rotatifs apparaissent avec un plan de symétrie. A $Re = 137$, les oscillations de sillage apparaissent avec un nombre de Strouhal mesuré de $St = 0.16$ ($St = \frac{fU}{D}$ où U est la vitesse de l'écoulement à l'infini, D le diamètre du disque et f la fréquence d'émission des tourbillons). En dépassant le nombre de Reynolds critique $Re_c = 142$, les tourbillons "épingle à cheveux" apparaissent. On constate à travers ces observations que dans le cas du disque, les régimes d'instabilités sont observés à des nombres de Reynolds moins élevés que dans le cas de la sphère. Dans le cas du disque épais $\chi = \frac{L}{D} = 1$ (avec L et D la hauteur et le diamètre du disque respectivement), Auguste (2010) a mis en évidence numériquement quatre bifurcations successives :

1. Ecoulement stationnaire à symétrie axiale où l'on observe une seule recirculation toroïdale classique avec un seul point de décollement de la couche limite à $Re = 200$.

2. Ecoulement stationnaire à symétrie plane à partir de $Re = 278$. Ce nouveau régime correspond à l'apparition des premiers filaments tourbillonnaires longitudinaux. Ce régime est appelé **bifide**, la force de portance et le moment associé ont le même signe. Ce régime est aussi observé dans le cas de la sphère pour $Re \in [212 : 273]$ voir figure 1.4(a).
3. Ecoulement instationnaire à symétrie plane à partir de $Re = 355$. On observe des lâchers tourbillonnaires alternés à une fréquence de $St = 0.118$ (voir figure 1.4(b)). On constate quand même une légère variation du Strouhal dans ce régime. Quand l'instabilité est pleinement développée, la moyenne temporelle du coefficient de portance est non nulle. Ce régime est appelé **zig-zig** par [Auguste \(2010\)](#).
4. A $Re = 400$, une seconde fréquence apparaît mais le plan de symétrie est toujours conservé.

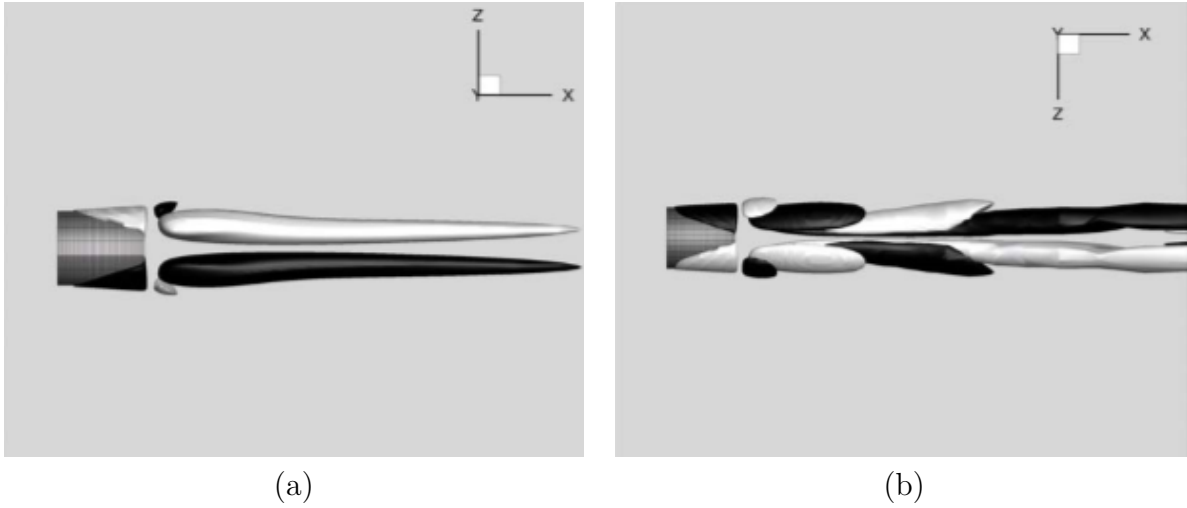


Figure 1.4. – (a) Deux tourbillons contra-rotatifs à $Re = 290$, (b) lâchers tourbillonnaires à $Re = 380$ ([Auguste, 2010](#)).

La première bifurcation définie par [Auguste \(2010\)](#) pour $\chi = 1$ a été observée par [Shenoy et Kleinstreuer \(2008\)](#) pour $\chi = \frac{1}{10}$ et par [Natarajan et Acrivos \(1993\)](#) pour un disque infiniment mince. [Fernandes et al. \(2007\)](#) ont montré que le nombre de Reynolds critique de la première bifurcation Re_{c1} évolue en fonction de χ comme $(1 + \chi)$. Pour $\chi = \frac{1}{10}$ $Re_{c1} = 135$ a été trouvé par [Shenoy et Kleinstreuer \(2008\)](#) et $Re_{c1} = 129.6$ par [Chrúst et al. \(2010\)](#). Contrairement au cas $\chi = 1$, pour un disque très mince ($\chi = \frac{1}{10}$) la deuxième bifurcation donne naissance à un régime périodique avec un plan de symétrie brisé comme l'ont montré [Shenoy et Kleinstreuer \(2008\)](#). Toujours dans le cas d'un disque mince, la troisième bifurcation a lieu pour des disques infiniment minces à $Re_{c3} = 140$ selon [Fabre et al. \(2008\)](#) et $Re_{c3} = 143$ selon [Chrúst et al. \(2010\)](#). Cette bifurcation donne naissance à un régime instationnaire avec un plan de symétrie,

observé par Shenoy et Kleinstreuer (2008). Ce régime est nommé "zig-zag" par Auguste *et al.* (2010).

b) Disque incliné

Le disque très mince ($\chi = \frac{1}{50}$) incliné d'un angle θ par rapport à la direction de l'écoulement présente plus de régimes d'instabilité que le disque aligné à l'écoulement. Le premier régime stationnaire axisymétrique est observé quand le disque est aligné ($\theta = 0^\circ$) par Gao *et al.* (2018). Selon ces auteurs la première bifurcation stationnaire est obtenue à $Re_{c1} = 130$. Elle brise l'axisymétrie mais conserve un plan de symétrie. Ce régime est aussi observé quand le disque est incliné pour une gamme d'angles d'inclinaison $\theta \in [0 : 60]$ et pour Re compris entre 95.6 et 188.5. La première bifurcation pour un disque incliné donne un régime périodique. Elle est observée pour $\theta = 55^\circ; 60^\circ$ par Tian *et al.* (2017) et pour $\theta = 40^\circ; 50^\circ$ par Gao *et al.* (2018) à $Re = 175$. Dans la gamme de θ compris entre 30° et 55° , Gao *et al.* (2018) détectent un nouveau régime périodique modulé pour $Re > 195$. En effet, la fréquence principale du régime périodique est modulée par une basse fréquence. Tian *et al.* (2017) observent ce régime pour $\theta = 45^\circ$ et 50° . Il est caractérisé par un lâcher alterné d'une paire de tourbillons contrarotatifs. Enfin, avant de passer au régime chaotique, Gao *et al.* (2018) observent un régime quasi-périodique pour $\theta < 30^\circ$ et pour un nombre de Reynolds allant jusqu'à 400, tandis que Tian *et al.* (2017) obtiennent ce régime pour $\theta = 35^\circ$ et 40° .

Sillage d'un cylindre en écoulement stationnaire uniforme

L'écoulement autour d'un cylindre fixe a été étudié dans l'objectif de caractériser les forces exercées sur le cylindre ainsi que son sillage. Trois paramètres adimensionnels interviennent dans ce problème : le nombre de Reynolds $Re = \frac{UD}{\nu}$, l'angle d'inclinaison du cylindre par rapport à l'écoulement θ et le rapport de forme $\frac{L}{D}$, avec L et D la longueur et le diamètre du cylindre respectivement, U la vitesse de l'écoulement à l'infini, et ν la viscosité cinématique du fluide. Dans cette section, nous présentons les différents travaux portant sur les écoulements stationnaires autour d'un cylindre fixe en fonction des paramètres cités.

a) Cylindre infini perpendiculaire à l'écoulement incident

Taneda (1956) a étudié expérimentalement le sillage d'un cylindre infini pour une gamme de nombres de Reynolds allant de 0.1 à 2000. L'auteur a décrit l'évolution du sillage en fonction du nombre de Reynolds comme l'illustre la figure 1.5 ci-dessous :

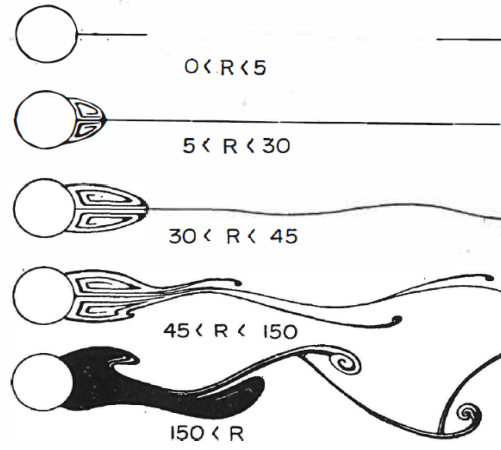


Figure 1.5. – Sillage du cylindre infini perpendiculaire à l'écoulement amont (Taneda, 1956).

Deux tourbillons jumeaux naissent à partir de $Re = 7$. A fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, la taille de ces deux tourbillons augmentent suivant la direction de l'écoulement. Ces tourbillons demeurent stables jusqu'à $Re = 47$, puis des allées de Von Karman se développent.

La relation expérimentale entre le nombre de Reynolds Re et le nombre de Strouhal St a été déterminée avec une précision de 1% au moins en deux dimensions (Williamson, 1988; Norberg, 1994). A $Re = 180$, le sillage devient tridimensionnel. Expérimentalement, il a été prouvé que cette transition implique deux modes d'émission des tourbillons. Dès le début de la transition, le mode A apparaît. Ce mode est caractérisé par des lignes de courant régulières dans le sillage ; un lâcher tourbillonnaire périodique avec des structures alignées d'un cycle au suivant dans la direction de l'écoulement est observé. A $Re = 230$, le mode B apparaît. Il est caractérisé par des lignes de courant irrégulières ; un lâcher tourbillonnaire irrégulier est observé mais c'est le mode A qui domine. A $Re = 260$ c'est le mode B qui domine et, à chaque transition entre ces deux modes, une discontinuité dans la courbe $St = f(Re)$ se produit (Thompson *et al.*, 1996).

b) Cylindre infini incliné

Dans le cas d'un cylindre infini, il a été montré que les coefficients de force ne sont plus sensibles au nombre de Reynolds à partir de $Re > 300$ (Schewe, 1983). Afin de voir l'influence de l'inclinaison du cylindre infini sur la structure du sillage ainsi que sur les forces hydrodynamiques, Zhao *et al.* (2009) ont étudié l'écoulement autour d'un cylindre infini stationnaire, à un nombre de Reynolds fixé à $Re = 1000$. L'angle d'inclinaison θ par rapport à la direction de l'écoulement varie de 30° à 90° . Il s'est avéré que durant la phase où l'écoulement est bidimensionnel les forces oscillent périodiquement. Ensuite, une phase transitoire apparaît avant que l'écoulement ne devienne tridimensionnel. Ce scénario est similaire au régime transitoire observé

expérimentalement par [Williamson \(1992\)](#). La figure 1.6 illustre les iso-surfaces de vorticité à $\theta = 90^\circ$ dans le régime transitoire.

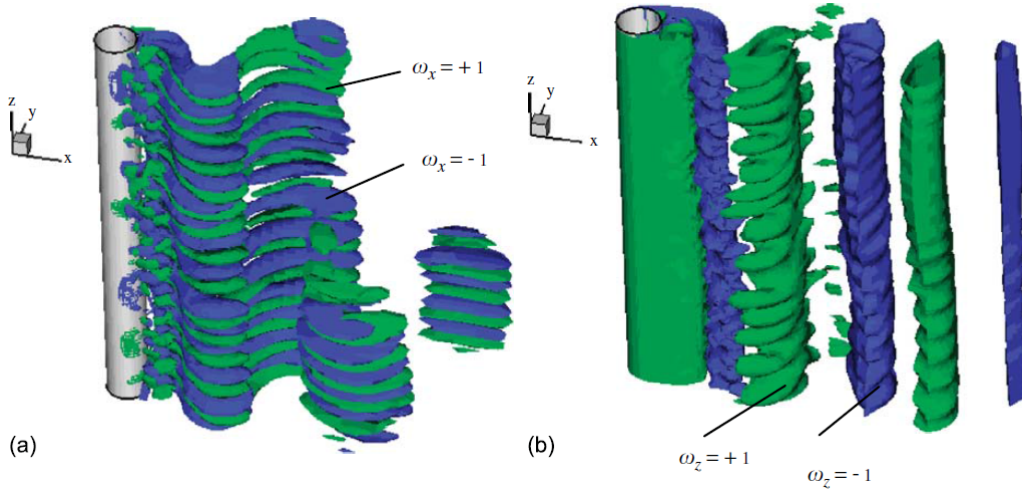


Figure 1.6. – Lâcher tourbillonnaire derrière un cylindre infini perpendiculaire à l'écoulement ([Zhao et al., 2009](#)).

Dans la direction transverse à l'écoulement, le lâcher tourbillonnaire est régulier. Les couleurs vertes et bleues représentent les iso-surfaces positives et négatives. Juste après la phase transitoire, l'écoulement devient purement tridimensionnel, et les lâchers tourbillonnaires deviennent irréguliers. Il s'est avéré aussi que la forme et la taille de la zone de recirculation dans le sillage du cylindre sont indépendantes de l'angle θ . En ce qui concerne les forces, le coefficient de traînée atteint son maximum à $\theta = 60^\circ$ et le coefficient de portance atteint son minimum à $\theta = 30^\circ$.

c) Cylindre fini perpendiculaire à l'écoulement

[Inoue et Sakuragi \(2008\)](#) ont utilisé la simulation numérique directe pour traiter le cas du cylindre fixe, fini, et perpendiculaire à l'écoulement aux extrémités libres pour différents rapports de forme et nombres de Reynolds. Leur étude a révélé l'existence de cinq types de sillages :

1. Lâcher périodique de tourbillons obliques pour des rapports de forme assez grands ($\chi > 25$) à un nombre de Reynolds au dessus du nombre de Reynolds critique $Re_c = 70$.
2. Lâcher quasi-périodique de tourbillons obliques pour un nombre de Reynolds en dessous du nombre de Reynolds critique $Re_c = 60$ et des rapports de forme $\chi > 70$.
3. Lâcher tourbillonnaire sous forme d' "épingles à cheveux" pour un rapport de forme modéré ($\chi < 10$).

4. Deux tourbillons contra-rotatifs stables, apparaissent quand χ et Re sont petits (voir figure 1.7).
5. Lâchers tourbillonnaires contra-rotatifs alternés se produisant quand χ est petit à grand nombre de Reynolds ($Re > 150$).

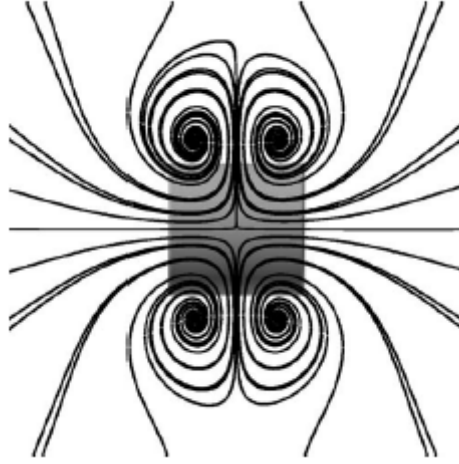


Figure 1.7. – Deux tourbillons contra-rotatifs à $Re = 150$ et $\chi = 1$ (Inoue et Sakuragi, 2008).

Pour illustrer l'effet du rapport de forme sur les structures tourbillonnaires, Inoue et Sakuragi (2008) ont considéré l'évolution du nombre de Strouhal en fonction de χ pour $Re = 100$. Le nombre de Strouhal dans le tourbillon central est plus grand que celui du tourbillon d'extrémité. En diminuant le rapport de forme, la taille du tourbillon central diminue. Par contre celle des tourbillons d'extrémités demeure inchangée. Quand χ s'approche de 20, la cellule centrale tend à disparaître. Ainsi St diminue rapidement et à $\chi = 28$ ce tourbillon central disparaît complètement.

Norberg (2001) a étudié expérimentalement l'influence du rapport de forme sur le nombre de Strouhal pour une gamme de nombres de Reynolds entre 50 et $4 \cdot 10^4$ et des rapports de forme $2 < \chi < 5000$. Il constate que le seuil du lâcher tourbillonnaire est indépendant du rapport de forme au delà de $\chi = 40$. Pour $\chi < 40$ il donne le nombre de Reynolds critique évolue en fonction du rapport de forme comme :

$$Re_c = 47,4 + 1,8 \cdot 10^3 \chi \quad (1.3)$$

d) Cylindre fini incliné

Ramberg (1983) a étudié expérimentalement l'écoulement autour de cylindres finis (aux bouts hémisphériques, plats, coniques) et inclinés pour $160 < Re < 1000$ (voir la configuration figure

1.8). Il a mis en évidence la sensibilité des résultats aux conditions aux extrémités du cylindre (bouts libres ou bouts à plaques planes), et a montré une dépendance entre l'angle d'inclinaison et la fréquence des lâchers tourbillonnaires. A bas nombre de Reynolds et à grand angle d'inclinaison, le sillage est stationnaire. Il observe un sillage instationnaire quand le cylindre est vertical ($\theta = 90^\circ$). Au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison diminue, le sillage devient instable et le filament tourbillonnaire se redresse. Pour des angles plus faibles, le sillage est divisé en deux structures tourbillonnaires, chacune avec un angle fixe.

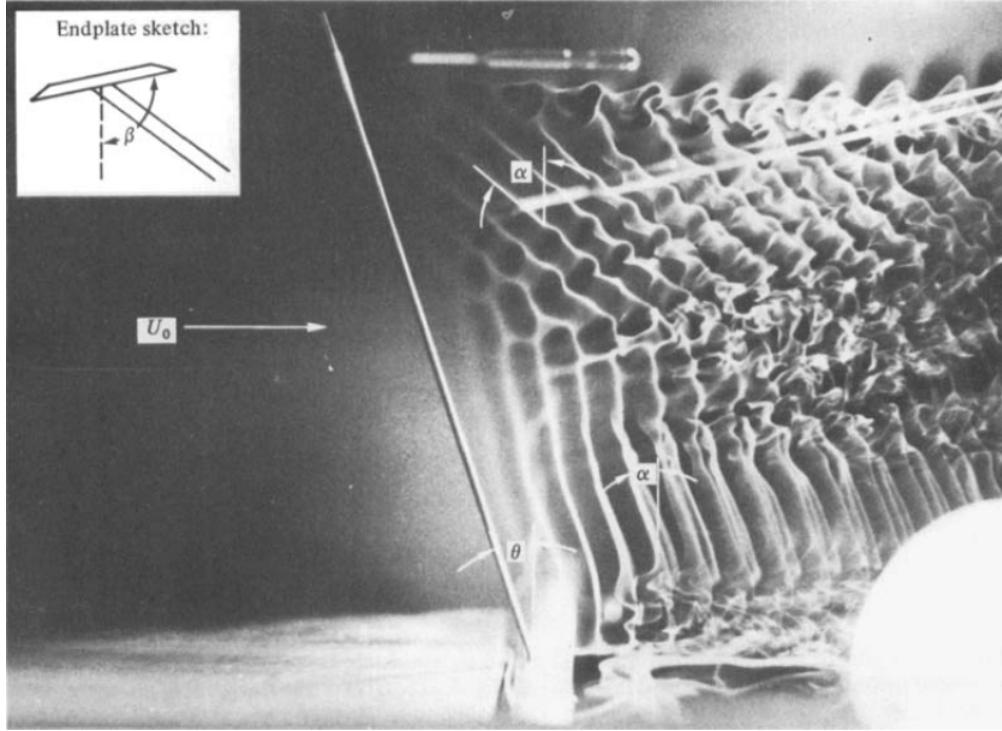


Figure 1.8. – Lâcher tourbillonnaire derrière un cylindre incliné (Ramberg, 1983).

Récemment, le cas cylindre fini et incliné a été traité numériquement par Pierson *et al.* (2019). Le rapport de forme est fixé à $\chi = 3$ et le nombre de Reynolds varie dans la gamme 25 – 200. A $Re = 200$, quatre structures tourbillonnaires ont été observées à différents angles d'inclinaison :

1. A $\theta = 0^\circ$, il existe simplement un tourbillon toroïdal comme l'illustre la figure 1.9(a)
2. A $\theta = 15^\circ$, deux tourbillons contra-rotatifs apparaissent dans un régime stationnaire. Le sillage garde son plan de symétrie, voir figure 1.9(b)
3. A $\theta = 30^\circ$, même structure que pour le cylindre incliné à $\theta = 15^\circ$ avec une paire de tourbillons apparaissant en dessous des tourbillons contra-rotatifs. Le sens de rotation des quatre tourbillons est alterné.
4. A $\theta = 75^\circ$, des lâchers tourbillonnaires périodiques sous forme d' "épingle à cheveux". En effet, les tourbillons ont des sens de rotation opposés, mais le sillage perd son plan de

symétrie (voir figure 1.10).

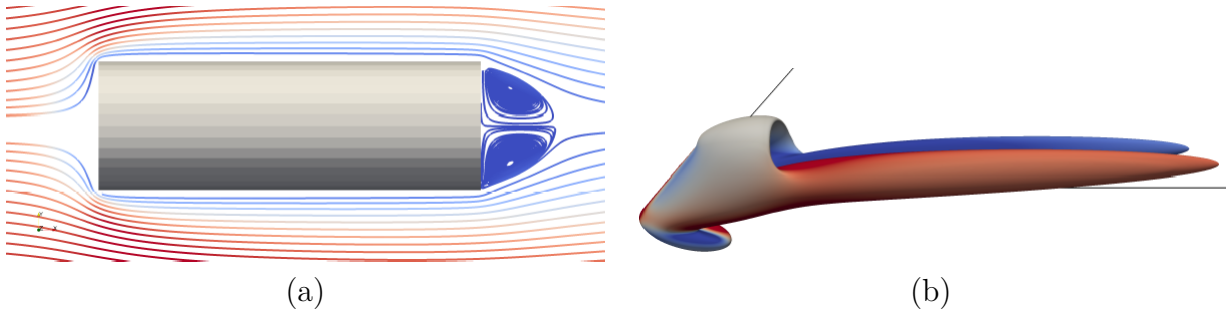


Figure 1.9. – (a) Tourbillon toroïdal à $\theta = 0^\circ$, (b) Deux tourbillons contra-rotatifs à $\theta = 15^\circ$ (Pierson *et al.*, 2019).

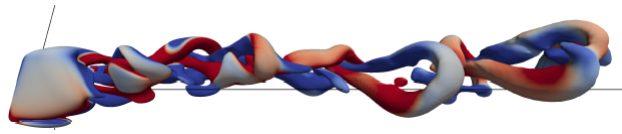


Figure 1.10. – Lâchers tourbillonnaires en "épingle à cheveux" $\theta = 75^\circ$ (Pierson *et al.*, 2019).

1.3. Objectifs et structure du manuscrit

Nous avons vu dans la section 2 que, dans un lit fluidisé les particules cylindriques situées près de la zone d'injection du fluide, s'alignent avec la direction de l'écoulement. Plus loin de cette zone, les particules s'inclinent par rapport à cette direction. D'autre part, l'écoulement autour d'un cylindre infini perpendiculaire à l'écoulement a été largement étudié aussi bien expérimentalement que numériquement. Dans la même configuration le cylindre fini a été examiné en fonction des rapports de forme et du nombre de Reynolds. L'écoulement autour d'un cylindre fini, et incliné a été traité par Pierson *et al.* (2019) avec un rapport de forme fixe en focalisant sur l'influence des deux autres paramètres Re et θ . Au regard de cet état de l'art, le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un écoulement uniforme autour d'un cylindre aligné et incliné avec la direction de l'écoulement. Nous nous proposons d'élargir le champ d'investigation en étudiant l'influence des trois paramètres adimensionnels, et plus particulièrement du rapport de forme. Nous nous intéressons aux écoulements autour d'un cylindre fini, incliné et à différents rapports de forme pour un nombre de Reynolds allant jusqu'à 400. Par la suite, nous proposerons des lois de coefficient de traînée, de portance, et de moment en fonction des trois paramètres gouvernant le problème. En ce qui concerne les instabilités du sillage, les différentes études analysées montrent bien que la première bifurcation fait toujours apparaître un premier mode instable stationnaire avec un plan de symétrie. Suivent une ou plusieurs bifurcations

conduisant à un régime instationnaire conservant un plan de symétrie avant de basculer vers un régime chaotique. Nous souhaitons vérifier si cet enchaînement de bifurcations reste valable pour des cylindres allongés et inclinés.

Nous avons également vu dans la section 1, que dans un lit fluidisé, les particules cylindriques subissent aussi un mouvement de rotation dû principalement à la collision entre particules et à leurs interactions avec le fluide. Ceci nous amène à nous intéresser à la rotation d'une particule cylindrique dans un fluide au repos. Ceci fera l'objet du chapitre 3. A notre connaissance cette configuration n'a jamais été traitée dans la littérature. Nous souhaitons d'abord décrire le sillage et l'écoulement perturbé autour du cylindre pour une large plage de nombres de Reynolds et différents rapports de forme. Ensuite, nous proposerons une loi de moment en fonction de Re et χ en régime de Stokes ainsi qu'en régime inertiel.

Ainsi le manuscrit s'articule comme suit :

Dans le chapitre 1 nous présentons le code JADIM utilisé dans la suite en détaillant les discrétisations temporelles et spatiales des équations résolues. Ensuite nous présentons une validation du code basée sur des cas traités dans la littérature. Le chapitre 2 porte sur la description de l'écoulement et des efforts sur un cylindre fini fixe et incliné soumis à un écoulement uniforme. Cette partie est présentée sous forme d'un article soumis au journal *Physical Review Fluids*. Le chapitre 3 porte sur l'écoulement résultant de la rotation imposée au cylindre dans un fluide au repos. Enfin, le dernier chapitre est une conclusion générale de ce travail, accompagnée de quelques perspectives.

2. Méthodologie numérique

Le code de calcul JADIM est un code de recherche développé au sein de L'institut de Mécanique des Fluides de Toulouse depuis une trentaine d'années, tout d'abord dans le cadre des thèses de [Rivero \(1991\)](#), [Calmet \(1995\)](#), et [Legendre \(1996\)](#). Il permet la résolution des équations de Navier-Stokes en coordonnées curvilignes orthogonales afin de s'adapter à des géométries variées (sphériques, axisymétriques...). L'avantage de ce type de coordonnées, est qu'il donne accès directement aux grandeurs normales et tangentielles (vitesses, contraintes).

2.1. Les équations de conservation

Le fluide est supposé newtonien et l'écoulement incompressible. Les équations de bilan sont formulées en variables vitesse-pression qui s'écrivent sous forme conservative :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U})] + \mathbf{F}_{vol} \quad (2.2)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \text{ le champ de vitesse, } P \text{ le champ de pression} \\ \rho \text{ la masse volumique du fluide et } \mu \text{ sa viscosité dynamique} \\ \mathbf{g} \text{ la gravité, } \mathbf{F}_{vol} \text{ les forces volumiques.} \end{array} \right.$$

2.2. Discrétisation spatiale et temporelle des équations

2.2.1. Discrétisation spatiale

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur une grille décalée par une méthode de volumes finis. La pression est calculée au centre des cellules et les vitesses au bord comme le montre le schéma bidimensionnel de la figure [2.1](#) :

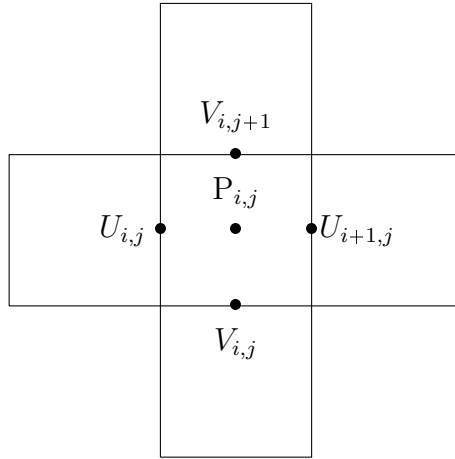


Figure 2.1. – Illustration du positionnement des variables de vitesse et de pression dans JADIM dans le cas d'un maillage en deux dimensions.

Chaque grandeur possède son propre volume d'intégration. L'avantage de ce type de maillage est de faciliter le calcul des flux sur les faces des volumes d'intégration. Toutes les dérivées spatiales sont calculées avec des schémas centrés d'une précision d'ordre 2. Les centres des volumes des composantes de la vitesse sont situés à mi-distance des centres des volumes de pression.

Le maillage décalé nous évite de définir une condition sur la pression car elle est définie au centre de chaque cellule. Toutes les cellules ont six faces sauf celles incluant l'axe de révolution qui n'ont que cinq.

2.2.2. Discrétisation temporelle

Les termes linéaires diffusifs (contraintes visqueuses) sont traités par un schéma semi-implicite de type Crank-Nicolson qui assure une stabilité inconditionnelle et une précision $O(\Delta t^2)$. Le système linéaire associé est résolu à l'aide d'une méthode directe (Calmet, 1995). Les autres termes sont traités d'une manière explicite par la méthode de Runge-Kutta à 3 pas de temps intermédiaires, qui assure une précision $O(\Delta t^3)$. La précision temporelle du code est donc d'ordre 2.

La vitesse $\hat{\mathbf{U}}^{n+1}$ possède déjà toute la vorticité du champ réel, et $\nabla\phi$ est une correction purement potentielle. L'algorithme hybride de Runge-Kutta/Crank-Nicolson peut s'écrire sous

la forme :

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n,k} - U_i^{n,k-1}}{\Delta t} = & -(\alpha_k + \beta_k) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial \xi_i} + (\alpha_k + \beta_k) L[[U_i^{n,k} + U_i^{n,k-1}] \\ & + \gamma_k N[U_i^{n,k-1}] + \xi_k N[U_i^{n,k-2}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

où (α_k, β_k) sont les coefficients du schéma de Crank-Nicolson et (γ_k, ξ_k) ceux de l'algorithme de Runge-Kutta. Dans (2.3), L représente les opérateurs associés aux termes linéaires (visqueux) et N ceux associés aux autres contributions, notamment les termes advectifs.

Le problème (2.3) conduit au système linéaire $AX = B$ avec $X = [U_i^{n,k} - U_i^{n,k-1}]$.

Il est possible de résoudre ce système directement, mais dans JADIM le choix a été fait de décomposer la résolution 3D en trois résolutions 1D. On obtient ainsi des petites matrices diagonales par blocs.

Le traitement explicite du terme $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ aboutit à une condition de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Levy). La condition d'incompressibilité est satisfaite à la fin de chaque pas de temps complet à l'aide d'une méthode de projection. Un potentiel auxiliaire ϕ^{n+1} est défini comme :

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{\nabla \phi^{n+1}}{\rho} \quad (2.4)$$

où $\hat{\mathbf{U}}^{n+1}$ est la vitesse obtenue au bout des trois pas de temps intermédiaires du schéma de Runge-Kutta, et \mathbf{U}^{n+1} est le champ de vitesse final.

Le potentiel auxiliaire ϕ^{n+1} vérifie la pseudo équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi^{n+1}}{\rho} \right) = \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\Delta t} \quad (2.5)$$

A l'instant $n + 1/2$ on a $P^{n+1/2} = P^n + \phi^{n+1}$ à $O(\Delta t^2)$ près. L'équation (2.5) est résolue par la méthode du gradient conjugué et donne accès directement à la solution en $t = n + 1$ ($\mathbf{U}^{n+1}, P^{n+1/2}$).

Une fois (2.3) résolue, \mathbf{U}^{n+1} est obtenu mais ne satisfait pas la condition d'incompressibilité. L'étape de projection (2.4)-(2.5) permet de satisfaire l'équation de continuité.

2.3. Formulation des équations dans le cas d'un objet en translation et rotation imposées

2.3.1. Résolution numérique

Soit un objet solide caractérisé par une condition de non-glissement immergé dans un fluide au repos à l'infini. Soit (R) un repère fixe galiléen et (R_c) un repère mobile lié au corps. Avant de présenter les équations qui régissent ce problème, on définit les grandeurs suivants :

$\mathbf{V}(x, y, z, t)$ la vitesse du corps et $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ la vitesse du fluide. Dans le cas où l'objet subi une translation et une rotation, on a $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}(x, y, z)$ où \mathbf{V}_c est la vitesse du centre géométrique du corps et $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ étant le vecteur position qui relie un point M de l'objet à son centre.

Les conditions aux limites du problème s'écrivent $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ à la surface du corps et $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ à l'infini.

Dans JADIM quand un corps se déplace dans un domaine fluide infini, il a été choisi d'utiliser un maillage fixe dans le temps, et en écrivant les équations de Navier-Stokes dans le repère lié au corps avec comme inconnue la vitesse absolue \mathbf{U} (Mougin et Magnaudet, 2002). Ceci permet d'avoir accès directement au champ de vitesse correspondant à la perturbation de l'écoulement dû au mouvement du corps. Mais surtout, l'avantage principal de cette formulation est le fait qu'elle évite de remailler le domaine au cours du temps. Dans ce cas, les équations qui gouvernent les grandeurs absolues (vitesse, pression) s'écrivent dans le repère relatif (Mougin et Magnaudet, 2002) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U} + \nabla \cdot (\mathbf{U}(\mathbf{U} - \mathbf{V})) = \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U})] \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Par rapport à la forme usuelle des équations de Navier-Stokes, la vitesse \mathbf{V} due au déplacement du corps par rapport au repère absolu (R) intervient dans le terme advectif. Pour prendre en compte la projection de la vitesse absolue sur des axes tournants, $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U}$ s'ajoute au terme instationnaire. Cette formulation diffère de celle où les équations sont écrites pour la vitesse relative $\mathbf{U} - \mathbf{V}$, qui conduit au terme de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{U} - \mathbf{V})$.

Soit (U^n, P^n) les champs de vitesse et de pression du fluide et (V_c^n, Ω^n) les champs de vitesse de translation et de rotation du corps à l'instant n. Dans le cas d'une cinématique imposée au corps, (V_c^n, Ω^n) sont connues à chaque instant. La résolution numérique ne change donc pas de ce qui a été décrit précédemment.

2.3.2. Calcul des efforts sur l'objet

Dans notre code le calcul des forces et des moments se fait sur chaque face du cylindre pour chaque contribution (visqueuse et pression). Les contributions visqueuses sont décomposées en contributions normales et tangentielles. Ensuite les efforts totaux sont obtenus en faisant la somme de toutes les contributions. Le calcul numérique des efforts est fait au centre de chaque cellule. Prenons l'exemple du calcul de la force $\mathbf{F} = \int_S \sigma \cdot \mathbf{n} dS$ appliquée sur la face ouest du cylindre, où S est sa surface, σ est le tenseur de contraintes et \mathbf{n} le vecteur normal à la surface. Le calcul numérique de cet intégral est réalisé grâce à la méthode de Monte-Carlo. Ce calcul est réalisé de la même manière dans tous les plans azimutaux. Rappelons qu'il est fait dans un système de coordonnées curviligne, et le passage aux coordonnées cartésiennes se fait directement d'une manière analytique.

2.4. Validation

2.4.1. Écoulement stationnaire uniforme sur un cylindre incliné

On considère un écoulement stationnaire uniforme autour d'un cylindre incliné de longueur finie. Le code JADIM a déjà été largement utilisé pour étudier l'écoulement autour de particules sphériques ainsi que les instabilités de sillage d'un écoulement autour d'un disque (voir par exemple [Magnaudet et al. \(1995\)](#) et [Auguste et al. \(2013\)](#)).

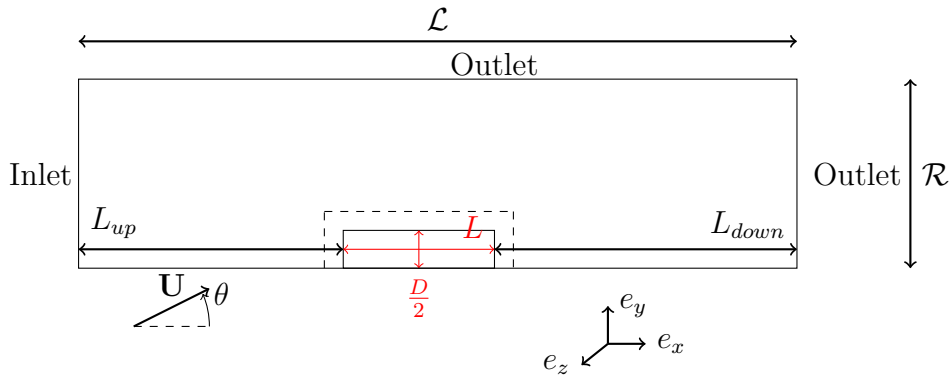


Figure 2.2. – Schéma du domaine numérique dans un plan azimutal.

Le domaine numérique est cylindrique de longueur \mathcal{L} (figure 2.2). Cette longueur peut être décomposée comme la somme de trois longueurs $\mathcal{L} = L_{up} + L + L_{down}$, où $L_{up} = 12D\chi^{1/3}$ est la distance entre l'entrée et la face amont du cylindre et $L_{down} = 20D\chi^{1/3}$ la distance entre la face aval du cylindre et la sortie du domaine. Pour s'assurer que le sillage est correctement résolu, L_{down} est plus grand que L_{up} et dépasse $15D$ comme le recommande [Auguste \(2010\)](#) pour

$\chi \in [0 : 1]$. Toutes les longueurs définies sont basées sur $D\chi^{1/3}$, i.e. une longueur caractéristique proportionnelle au diamètre équivalent du cylindre. Ce choix a été proposé par [Pierson et al. \(2019\)](#) pour faire varier la taille du domaine en fonction du rapport de forme, tout en gardant un coût numérique raisonnable. Le rayon du domaine numérique est $\mathcal{R} = 0.5D + 20D\chi^{1/3}(1 + 0.8\sin\theta)$ (figure 2.2). Le rayon varie en fonction de l'angle d'inclinaison pour s'assurer que le sillage est correctement capté quand le cylindre est incliné. La vitesse de l'écoulement en entrée est inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe de symétrie du cylindre (figure 2.2). Une condition de non-glissement est imposée sur la surface du cylindre, et une condition de sortie non-réfléchissante est imposée sur le plan de sortie et la surface latérale du domaine ([Magnaudet et al., 1995](#)) de telle sorte que la vorticité soit évacuée sans perturber l'écoulement. Cette condition consiste à imposer à la vitesse normale U_n ,    la vitesse tangentielle U_t et à la pression P les conditions suivantes : $\frac{\partial^2 U_n}{\partial n^2} = 0$; $\frac{\partial^2 U_t}{\partial n^2} = 0$; $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial P}{\partial n}) = 0$, où $\partial/\partial n$ et $\partial/\partial t$ sont respectivement les dérivées suivant le vecteur normale et tangentiel à la frontière du domaine considéré.

Un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est défini, où x est parallèle à l'axe de symétrie du cylindre et z est perpendiculaire au plan défini par la direction de l'écoulement et l'axe du cylindre. La vitesse d'entrée s'écrit dans ce système de coordonnées $\mathbf{U} = (U \cos \theta, U \sin \theta, 0)$.

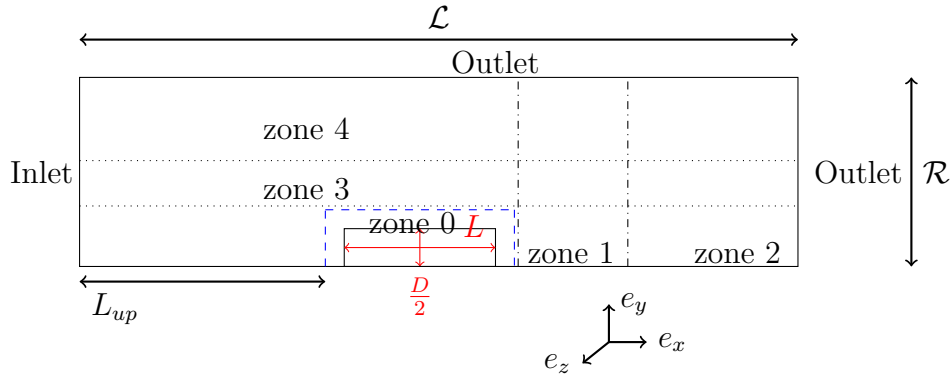


Figure 2.3. – Schéma 2D de la construction du maillage.

Construction du maillage : La figure 2.3 présente une coupe 2D du domaine numérique cylindrique et qui s'arrête au niveau de l'axe de symétrie du cylindre. Nous utilisons un maillage cylindrique, avec une combinaison de mailles régulières et irrégulières. Le maillage est construit suivant les deux directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . Suivant la direction \mathbf{e}_x , le maillage est tout d'abord construit en amont du cylindre, puis dans la zone 0, puis enfin dans les zones 1 et 2. Selon la direction \mathbf{e}_y , le maillage est construit d'abord dans la zone 0, puis dans les zones 3 et 4. Dans tous les plans azimutaux, le maillage est régulier près du coin du cylindre afin de bien capter l'écoulement près de l'arête, et un peu l  ch   en s'approchant du centre du cylindre et près de l'axe de symétrie. On admet que l'épaisseur de la couche limite est donnée par D/\sqrt{Re} et nous utilisons

8 mailles pour la décrire. Ce choix sera validé après. La taille caractéristique de la maille dans la région de la zone 0 distante de $0.5D$ du cylindre (rectangle en pointillés sur la figure 2.3) est donc $\Delta x \approx D/(8\sqrt{Re})$. En dehors de la zone 0, le maillage est toujours irrégulier, il suit une loi géométrique de raison différente selon la position par rapport au cylindre (aval ou amont). Néanmoins, le rapport de forme des mailles reste modéré le long de l'axe de symétrie de manière à bien résoudre le sillage. 128 plans azimutaux ont été utilisés pour s'assurer que les mailles proches du cylindre aient des dimensions similaires dans toutes les directions. Dans la zone amont, le maillage dans la direction \mathbf{e}_x est construit de la manière suivante :

$\Delta x[i] = a_1 \times q_1 \times i$, avec i variant de 1 à $N_{x_{am}}$ et $a_1 = \frac{L_{up} \times (1-q_1)}{q_1 - q_1^{N_{x_{am}}+1}}$, q_1 désignant la raison géométrique, L_{up} la distance entre la zone en pointillés et l'entrée du domaine, $N_{x_{am}}$ désignant le nombre de cellules en amont. Etant donné que L_{up} est fixe, on fait varier q_1 et $N_{x_{am}}$ pour construire le maillage dans cette zone. Le rapport de forme entre la plus grande maille et la plus petite est donné par $q_1^{N_{x_{am}}}$. Dans la région aval, il existe deux zones de maillage irrégulier comme le montre la figure 2.3 (zone 1 et zone 2) maillées de la même manière dans la direction \mathbf{e}_x mais avec des raisons géométriques différentes :

$\Delta x[i] = \Delta x_{min} \times q^{i-N_x}$, avec i variant de 1 à N_x , N_x désignant le nombre de mailles dans cette zone.

La raison géométrique q dans la zone 1 a été calculée en prenant en considération le rapport de forme des mailles près du cylindre, la taille du sillage, ainsi que l'angle d'inclinaison du cylindre suivant la relation suivante :

$q = [(1.0 - (L_{st} - 1.) \times \Delta x_{min}/(4 \times L^{1/3} \cos \theta))]^{-1}$, où L_{st} désigne le rapport de forme entre la plus grande et la plus petite cellule, θ l'angle d'inclinaison du cylindre, L sa longueur. Dans la zone 2, la raison géométrique est imposée de manière à respecter un étirement raisonnable des cellules. Elle est cependant plus grande que celle de la zone 1. Notons que dans les zones 2 et 4 la raison géométrique utilisée est la même. De la même manière, on construit le maillage dans la direction \mathbf{e}_y . La seule différence réside dans le calcul de la raison dans la zone 3 :

$$q = [(1.0 - (L_{st} - 1.) \times \Delta y_{min}/(4 \times L^{1/3} \sin \theta))]^{-1}.$$

Une fois que le maillage axisymétrique dans le plan (e_x, e_y) est réalisé, nous obtenons le maillage tridimensionnel par rotation du maillage plan autour de l'axe e_x comme l'illustre la figure 2.4. Le passage du système curviligne orthogonal au système cartésien se fait directement de manière analytique.

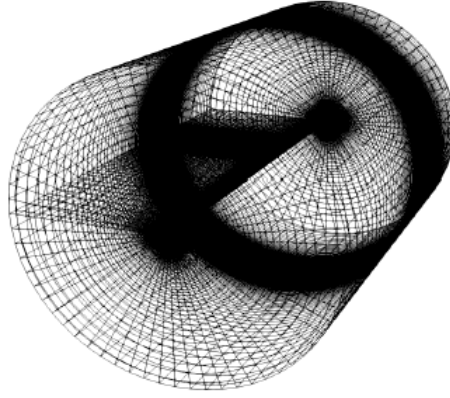


Figure 2.4. – Exemple du maillage cylindrique.

Dans la suite, nous présentons la validation de l’approche numérique en considérant la configuration d’un écoulement autour d’un cylindre incliné de rapport de forme $\chi = 3$ pour différents nombres de Reynolds. Nous présentons d’abord en détail la convergence en maillage, puis nous comparons nos résultats à ceux obtenus par [Pierson *et al.* \(2019\)](#).

	Nombre de mailles dans la couche limite	C_d	Erreur %
$Re = 100, \theta = 5^\circ$	5	0.478	0.62
	8	0.479	0.4
	10	0.481	-
$Re = 100, \theta = 15^\circ$	5	0.546	2.2
	8	0.534	0.37
	10	0.532	-
$Re = 200, \theta = 15^\circ$	5	0.416	1.4
	8	0.411	0.2
	10	0.410	-

Table 2.1. – Coefficient de traînée C_d pour trois différents maillages et trois configurations. 5, 8 ou 10 mailles sont distribuées dans l’épaisseur de la couche limite. L’erreur relative est basée sur le maillage le plus raffiné.

Nous déterminons tout d’abord le nombre de mailles nécessaires dans la couche limite d’épaisseur D/\sqrt{Re} , en augmentant progressivement le nombre de mailles dans cette zone. Le tableau [2.1](#) montre l’effet du raffinement du maillage sur le coefficient de traînée (défini en normalisant la force correspondante par $\rho U_\infty^2 LD$) pour les trois configurations. 8 mailles suffisent pour résoudre la couche limite, étant donné que l’erreur relative par rapport au cas le plus raffiné est de moins de 0.5% pour chaque configuration.

Re	θ	C_d		$E(C_d)\%$
		Pierson <i>et al.</i> (2019)	Résultats présents	
100	5°	0.472	0.479	1.4
	10°	0.499	0.501	0.4
	15°	0.536	0.534	0.3
	30°	0.693	0.680	1.4
200	10°	0.350	0.345	1.4
	15°	0.405	0.411	1.5

Table 2.2. – Comparaison du coefficient de traînée C_d obtenu avec notre approche numérique avec les résultats obtenus par Pierson *et al.* (2019) pour $5^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ et deux nombre de Reynolds. $E(C_d)$ représente l’erreur relative sur le coefficient de traînée.

Nous comparons également nos résultats numériques obtenus avec 8 mailles dans la couche limite avec les résultats obtenus par Pierson *et al.* (2019) qui ont utilisé une méthode numérique différente de la notre (code PELIGRIFF). Le tableau 2.2 montre les résultats de cette comparaison pour 6 configurations entièrement différentes. On constate un bon accord entre les deux approches dans le sens où l’écart relatif entre les résultats ne dépasse pas 1.5%.

2.4.2. Rotation forcée d’un cylindre dans un fluide au repos

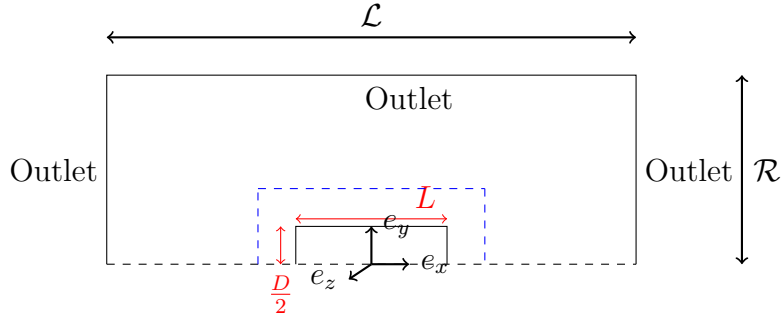


Figure 2.5. – Coupe 2D de la partie supérieure du domaine numérique.

Le domaine numérique utilisé est cylindrique, le maillage est fixe par rapport au cylindre et les équations de conservations sont écrites sous la forme détaillée de la section 3. Le cylindre est fixe mais les vitesses générées par sa rotation sont non nulles sur sa surface. Le cylindre est mis en rotation dans le sens anti-horaire. La figure 2.5 illustre une coupe 2D du domaine numérique, où le cylindre est situé au centre. Le domaine dans le plan de coupe est carré c’est à dire que ses dimensions sont telles que $\mathcal{L} \approx 2\mathcal{R}$. Son centre coïncide avec l’origine du repère (e_x, e_y, e_z) . Des conditions aux limites similaires à celles utilisées pour le cas de l’écoulement stationnaire uniforme (voir chapitre précédent) sont utilisées ici. La seule différence est qu’il

n'y a plus de condition d'entrée, tous les bords du domaine numérique sont des sorties. La condition de sortie non-réfléchissante décrite dans la section 3.1 est utilisée, de telle sorte que la vorticité est évacuée sans perturber l'écoulement (Magnaudet *et al.*, 1995). Dans la zone proche du cylindre, délimitée par un trait vert de la figure 2.5, i.e. pour une distance inférieure à $0.5D$ par rapport aux contours du cylindre, le maillage est régulier. En dehors de cette zone, le maillage est irrégulier et nous utilisons une suite géométrique avec une raison inférieure à 1.1 de telle sorte que le rapport de forme des cellules les plus éloignées du cylindre ne dépasse pas 12.

Numéro du domaine	$\mathcal{L} = 2\mathcal{R} + L$	C_t	$E(\%)$
1	$50D + L$	-2.031	
2	$40D + L$	-2.034	0.14
3	$30D + L$	-2.012	0.9

Table 2.3. – Comparaison du coefficient de moment C_t pour $\chi = 3, Re = 100$ obtenu avec différents domaines numériques. $E(\%)$ est l'écart relatif par rapport au résultat obtenu avec le plus grand domaine.

A ce stade il est nécessaire de connaître la taille du domaine pour laquelle les conditions aux limites n'impactent ni le calcul du moment ni l'écoulement. Le tableau 2.3 compare les moments obtenus en régime stationnaire pour trois domaines de taille croissante. Le choix s'est porté sur le domaine 3 qui présente un écart de 0.9% par rapport au domaine le plus large. La taille du domaine doit également varier avec le rapport de forme du cylindre, car les dimensions du sillage dépendent de la géométrie du cylindre. La taille du domaine choisie pour tout les rapports de forme est $\mathcal{L} = 30D + L$.

Numéro du maillage	Nombre de mailles dans la couche limite	C_t	$E\%$
1	8	-1.983	
2	6	-1.992	0.45
3	5	-2.012	1.4

Table 2.4. – Comparaison du coefficient de moment C_t pour $\chi = 3, Re = 100$ et trois maillages différents. L'épaisseur de la couche limite est calculée à l'aide de l'expression $\delta = D/\sqrt{Re}$.

Trois maillages ont été testés, différant essentiellement par le nombre de cellules introduites dans la couche limite. Comme le montre le tableau 2.4, 6 cellules dans la couche limite sont suffisantes pour notre étude, car l'écart relatif est faible (moins de 1%) par rapport au maillage le plus raff n . Dans les trois maillages, le nombre de plans azimutaux est fixé à $N_z = 64$. En effet, la taille des cellules dans la direction azimutale est donnée par la relation : $\Delta_z = \pi D/N_z$. Pour la gamme de nombres de Reynolds étudiée, la taille des cellules dans la direction azimutale

est du même ordre de grandeur que dans la direction radiale. Par ailleurs, des tests avec $N_z = 81$ donnent des résultats comparables à $N_z = 64$ avec un écart de 1.2% sur le moment.

Jusqu'à présent nous avons déterminé la taille du domaine ainsi que le maillage nécessaire à l'obtention de résultats précis en régime inertiel. Cette analyse est néanmoins caduque à petit nombre de Reynolds, où les perturbations générées par la rotation du corps décroissent beaucoup moins vite qu'en régime inertiel. En effet pour des corps suffisamment longs, le champ de vitesse résulte de l'intégration linéique d'une distribution de "Stokeslets" ([Batchelor, 1970](#)). La perturbation de vitesse décroît comme $1/r$ loin de l'objet où r est la distance par rapport à l'origine du "Stokeslet". Il est donc nécessaire de mettre encore des domaines beaucoup plus grands que pour les régimes inertiels. Nous avons utilisé des domaines de longueur $\mathcal{L} = 150D$ pour $\chi = 3$, $\mathcal{L} = 200D$ pour $\chi = 6$, $\mathcal{L} = 250D$ pour $\chi = 10$ et $\chi = 15$. Du fait de la taille de ces domaines et pour des raisons de coût de calcul, 16 cellules seulement sont distribuées par diamètre du cylindre. Néanmoins, des tests de validation ont permis de vérifier que ce nombre était suffisant pour caractériser avec précision les efforts sur l'objet. Des conditions de symétrie sur chacune des limites du domaine ont été privilégiées dans ces simulations. En effet, des flux entrants peuvent apparaître sur les frontières du domaine, ce qui génère inmanquablement des instabilités numériques.

3. Flow structure and loads over inclined cylindrical rodlike particles and fibers

Ce chapitre est constitué d'un article accepté pour publication dans la revue *Physical Review Fluids*, accompagné d'un document complémentaire.

Flow structure and loads over inclined cylindrical rodlike particles and fibers

Mohammed Kharrouba^{1,2}, Jean-Lou Pierson^{1a}, and Jacques Magnaudet^{2b}

¹*IFP Energies Nouvelles, 69360 Solaize, France and*

²*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT),
Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France*

Keywords: slender body, hydrodynamic force, fiber

ABSTRACT

The flow past a fixed finite-length circular cylinder, the axis of which makes a nonzero angle with the incoming stream, is studied through fully-resolved simulations, from creeping-flow conditions to strongly inertial regimes. The investigation focuses on the way the body aspect ratio χ (defined as the length-to-diameter ratio), the inclination angle θ with respect to the incoming flow and the Reynolds number Re (based on the cylinder diameter) affect the flow structure past the body and therefore the hydrodynamic loads acting on it. The configuration $\theta = 0^\circ$ (where the cylinder is aligned with the flow) is first considered from creeping-flow conditions up to $Re = 400$, with aspect ratios up to 20 (10) for $Re \leq 10$ ($Re \geq 10$). In the low-to-moderate Reynolds number regime ($Re \lesssim 5$), influence of the aspect ratio, inclination (from 0° to 30°), and inertial effects is examined by comparing numerical results for the axial and transverse force components and the spanwise torque with theoretical predictions based on the slender-body approximation, possibly incorporating finite-Reynolds-number corrections. Semiempirical models based on these predictions and incorporating finite-length and inertial corrections extracted from the numerical data are derived. For large enough Reynolds numbers ($Re \gtrsim 10^2$), separation takes place along the upstream part of the lateral surface of the cylinder, deeply influencing the surface stress distribution. Numerical results are used to build empirical models for the force components and the torque, valid for moderately inclined cylinders ($|\theta| \lesssim 30^\circ$) of arbitrary aspect ratio up to $Re \approx 300$ and matching those obtained at low-to-moderate Reynolds number.

I. INTRODUCTION

The flow past rodlike cylindrical particles or cylindrical fibers with circular cross section is involved in many industrial and natural processes such as bubbling fluidized beds, pulp and paper making or the sedimentation of ice crystals in clouds. Despite the large number of studies devoted to the flow past a circular cylinder held perpendicular to the incoming flow in the laminar and transitional regimes, much less is known when the body is arbitrarily inclined or even aligned with this incoming flow. Three dimensionless parameters then govern the problem when the upstream flow is steady and uniform: the aspect ratio $\chi = L/D$ where L is the length of the cylinder and D its diameter, the inclination angle θ (pitch or yaw angle) which is the angle between the cylinder axis and the incoming velocity, and the Reynolds number $Re = \frac{\rho U D}{\mu}$, where U is the norm of the upstream velocity, and ρ and μ are the fluid density and dynamic viscosity, respectively.

Up to now, the flow past long rigid cylinders and the loads acting upon them have been investigated in two markedly different contexts. The first of them is the dynamics of dilute suspensions of slender particles, the theoretical study of which was pioneered by Batchelor [1] and Cox [2] in the creeping-flow limit. The corresponding results for the force and torque acting on an isolated fiber (see also [3]), based on the slender-body theory, were extended to low-but-finite Reynolds numbers by Khayat and Cox [4]. Since then, these various predictions have been extensively used in numerical simulations, be it to study the influence of hydrodynamic interactions and concentration on the sedimentation of a fiber suspension [5, 6] or to reveal the dispersion properties of such suspensions in isotropic [7] or wall-bounded [8] turbulence; see [9] for a review.

The second stream of investigations, often motivated by vortex-induced vibrations and applications to fluid-structure interactions, has focused on larger Reynolds numbers. Ramberg [10] studied experimentally the flow past long inclined cylinders with various end shapes for Reynolds numbers in the range $1.5 \times 10^2 - 10^3$. His experiments provide a qualitative map of the wake topology and shedding process as a function of the inclination angle. In particular, they show that, unlike the classical vortex patterns observed when the cylinder is held perpendicular to the flow [11], the wake is dominated by a pair of counter-rotating vortices emanating from the ends when the inclination angle is small enough. Numerical studies of the flow past an inclined cylinder in inertia-dominated regimes have also been reported [12, 13]. Based on the numerical data, these investigations

^a Email address for correspondence: jean-lou.pierson@ifpen.fr

^b Email address for correspondence: magnau@imft.fr

proposed empirical expressions for the drag and lift forces valid throughout the considered range of χ and Re for arbitrary inclinations. Both studies examined the applicability and limitations of the so-called Independence Principle [10, 14, 15]. This ‘principle’, which states that the perpendicular force on a long cylinder depends solely on the normal velocity component of the incoming flow, was shown to apply only to large inclinations, $\theta \gtrsim 45^\circ$. Pierson et al. [13] also considered the possibility to extend trigonometric relations valid under Stokes flow conditions to obtain the drag and lift forces at an arbitrary θ through simple linear combinations of the drag forces corresponding to the two extreme cases $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 90^\circ$, an approach that has proved successful for prolate spheroids over a wide range of Reynolds numbers [16].

In this paper, we expand on available studies by considering the flow past finite-length cylinders with flat ends, from creeping flow conditions up to $Re \gtrsim 300$ for moderate inclinations, namely $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. The cylinder aspect ratio is varied from 2 to 20 in the reference case $\theta = 0^\circ$, and from 3 to 7 in inclined configurations. By considering this wide range of Reynolds number, we aim at bridging the gap between conditions typical of submillimeter-diameter fibers relevant for instance to papermaking (for which D stands typically in the range $15 - 30 \mu\text{m}$) and millimeter-diameter rodlike particles relevant to fluidized beds (which have aspect ratios typically in the range $2 - 10$). The reason why we concentrate on low-to-moderate inclinations is two-fold. First, as already mentioned, the current knowledge of the flow structure and drag variations with Re over a slender circular cylinder aligned with the flow is still far from complete. To the best of our knowledge, no study has considered this configuration from creeping-flow conditions up to Reynolds of some hundreds which are easily reached in some of the applications mentioned above. Similar to the case of a finite-length cylinder held perpendicular to the flow, a more complete description of this reference configuration is mandatory to improve the predictions of the trajectories of sedimenting rodlike particles and fibers spanning all possible orientations with respect to their path. Then, with the same final objective in mind, an important question in inertia-dominated regimes is to understand how the flow structure and the loads on the body are affected by the loss of axial symmetry encountered as soon as the inclination angle becomes nonzero. In particular, given the three-dimensional nature of the flow past an inclined cylinder, it is not clear how far the trigonometric approach mentioned above can be used to predict realistically the loads acting on it, based only on results for the axisymmetric geometry corresponding to $\theta = 0^\circ$ and the nearly two-dimensional geometry (for large χ) corresponding to $\theta = 90^\circ$. These are the main objectives of the present investigation.

The paper is organized as follows. We first present the numerical approach in Sec. II and, in appendix A, provide a validation of this approach by comparing some of the results obtained at moderate Reynolds number with those of [13]. In Sec. III, we specifically examine the case of a finite-length cylinder aligned with the incoming flow. We first consider (Sec. III A) low-to-moderate Reynolds numbers, for which we use numerical results to improve over available drag predictions provided by the slender-body approximation (in appendix B, we extend the available theoretical prediction in the creeping-flow limit by computing explicitly the next-order finite-aspect-ratio correction). Then (Sec. III B), we consider Reynolds numbers in the range $20 - 400$ and use numerical predictions for the pressure and viscous contributions to the drag to obtain an empirical drag law valid whatever χ throughout this range of Re . The inclined configuration is examined in Sec. IV in the low-to-moderate Reynolds number range. We compare numerical findings with available theoretical predictions and make use of results established in Sec. III A to provide semiempirical laws for the drag, lift and torque as a function of the control parameters (since the law for the transverse force involves the drag on a cylinder held perpendicular to the flow, we discuss slender-body predictions in this specific configuration and extend them empirically in appendix C). In Sec. V, we proceed with the flow past an inclined cylinder in the moderate-to-large Reynolds number range $10 \lesssim Re \lesssim 300$. We analyze the structure of the steady non-axisymmetric flow and its connection with the observed, sometimes nonintuitive, variations of the loads with Re , θ and χ . We finally provide empirical fits capable of reproducing these complex variations throughout the explored range of parameters. A summary of the main results and a discussion of some open issues are provided in Sec. VI.

II. NUMERICAL METHODOLOGY

We consider the uniform incompressible steady flow of a Newtonian fluid past a finite-length circular cylinder. Computations are carried out with the JADIM code developed at IMFT. This code was used in the past to investigate various problems involved in the local dynamics of particle-laden and bubbly flows, among which the hydrodynamic forces acting on spheres in uniform or accelerated flows [17], the transition in the wake of spheres, disks and short cylinders [18, 19] and the path instabilities of freely-falling disks and light spheres [20, 21]. The code solves the three-dimensional unsteady Navier-Stokes equations using a finite volume discretization on a staggered grid. Centered schemes are used to discretize spatial derivatives in the momentum equation. Time advancement is achieved by combining a third-order Runge-Kutta algorithm for advective terms with a Crank-Nicolson scheme for viscous terms. The divergence-free condition is satisfied to machine accuracy at the end of each time step using a projection method. More details on the numerical methodology may be found in [17] and [22].

The present investigation makes use of a cylindrical computational domain with length \mathcal{L} and radius \mathcal{R} (Fig. 1). The length \mathcal{L} may be decomposed as $\mathcal{L} = L_{up} + L + L_{down}$, where L_{up} (resp. L_{down}) is the distance between

the domain inlet (outlet) and the upstream (downstream) end of the cylinder. In what follows, for moderate-to large Reynolds numbers (say $Re > 5$), we select $L_{up} = 12D\chi^{1/3}$ and $L_{down} = 20D\chi^{1/3}$. The reason why L_{up} and L_{down} are defined based on $D\chi^{1/3}$, a length scale proportional to the diameter of the equivalent sphere, *i.e.* the sphere with the same volume as the cylinder, is that this choice makes the size of the domain vary with the body aspect ratio while keeping the computational cost reasonable [13]. With the above choice, L_{down} is larger than $15D$ even for $\chi = \mathcal{O}(1)$, which guarantees that the near wake is properly resolved for short-length cylinders [23]. The radius of the numerical domain is chosen as $\mathcal{R} = 0.5D + 20D\chi^{1/3}(1 + 0.8\sin\theta)$ (Fig. 1). It increases with the inclination angle to make sure that the wake is correctly captured whatever the body inclination. At low Reynolds number, care must be taken of artificial confinement effects inherent to the $1/r$ -decay of the disturbance (with r the distance to the body center). For this reason, in the low-to-moderate- Re regime $Re \leq 5$, we increase L_{up} and L_{down} by a factor of at least 2, and increase \mathcal{R} by a factor of at least 3 compared to the above values. A uniform fluid velocity making an angle θ with the body axis is specified on the inlet plane (Fig. 1). A no-slip boundary condition is imposed on the body, while a non-reflecting boundary condition is imposed on both the outlet plane and the lateral boundary [17]. We define a Cartesian coordinate system (x, y, z) centered at the body geometrical center, with x parallel to the body symmetry axis and z perpendicular to the plane containing the direction of the upstream flow and the body axis. In this coordinate system, the incoming velocity is $\mathbf{U} = (U \cos \theta, U \sin \theta, 0)$.

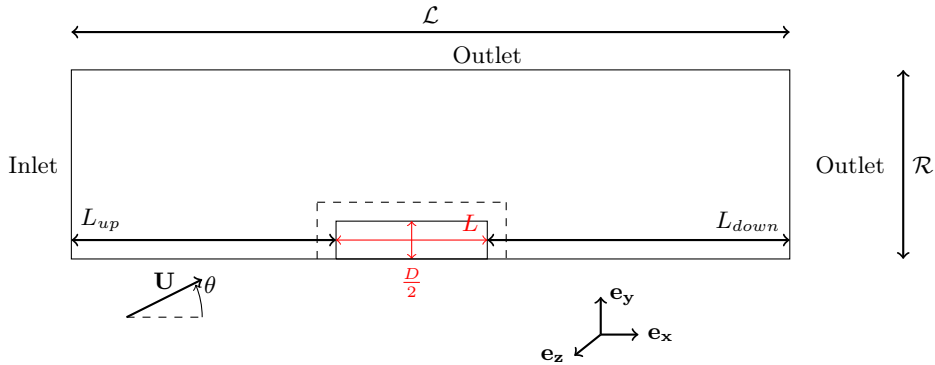


FIG. 1: Scheme of the computational domain in an azimuthal plane (not to scale).

Simulations are performed with an axisymmetric cylindrical grid made involving regions with uniform and non-uniform cell distributions. In the cross-sectional plane $z = 0$, a refined uniform distribution is used near the corners of the body, to properly capture the local flow (see [20] for details). A slightly non-uniform distribution is imposed in a rectangular region extending up to $0.5D$ outside of the body in each direction (dashed line in Fig. 1). In this flow region, the cell aspect ratio is maintained below 4 everywhere. Non-uniform cell distributions are used around the symmetry axis $y = z = 0$ and near the body symmetry plane $x = 0$. In the low-to-moderate Reynolds number regime $Re \leq 5$, we select a grid with 20 cells per body diameter (earlier computations were performed with only 12 cells per body diameter and minimal changes were noticed between the two resolutions). For larger Reynolds numbers, we assume that the boundary layer thickness scales as $DRe^{-1/2}$ and make sure that at least 8 cells stand within it. The characteristic grid size in this region is thus $\Delta \approx D/(8Re^{1/2})$. Whatever the Reynolds number, the grid is non-uniform in the outer region (*i.e.* beyond the dashed rectangle in Fig. 1), with cell sizes following a geometric law. For $Re > 5$, the growth of the cells along the domain axis is controlled to guarantee that the wake is adequately resolved. In the azimuthal direction, 32 to 128 planes are used, depending on the Reynolds number. No discernible difference in the solutions returned by the 32 and the 64 azimuthal resolutions was noticed up to $Re = 5$. The highest azimuthal resolution ensures that the cells closest to the body have approximatively the same size in all three directions. Although the code has been extensively validated in the past, an additional validation involving a grid convergence analysis is reported in appendix A. Present results are found to agree well with those of [13] obtained with a distinct numerical methodology.

III. CYLINDER ALIGNED WITH THE UPSTREAM FLOW

In this section we investigate the flow past a finite-length cylinder aligned with the incoming velocity. Our main purpose is to provide drag laws for cylinders of arbitrary aspect ratio beyond 2 over a wide range of Reynolds number ($0.05 \leq Re \leq 400$). We consider aspect ratios up to 20 and discuss the results in ascending order of Reynolds number.

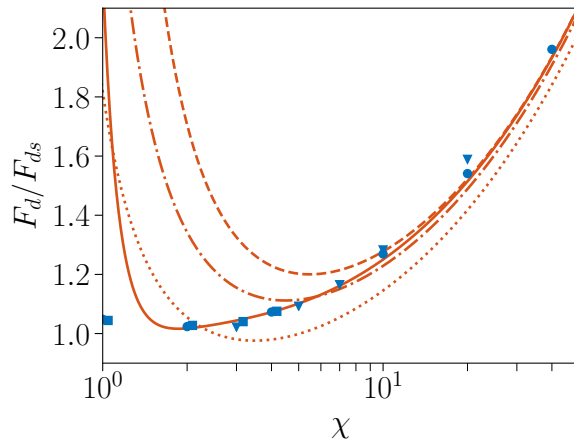


FIG. 2: Drag on a finite-length cylinder aligned with the flow direction, normalized by the drag F_{ds} of a sphere of same volume. Dotted, dash-dotted and dashed lines: predictions of 2^{nd} -, 3^{rd} - and 4^{th} -order slender-body approximations, respectively; solid line: semiempirical formula (1); \bullet : numerical results of [26]; \blacksquare : experimental results of [27]; \blacktriangledown : present numerical results for $\text{Re} = 0.05$.

A. From creeping-flow conditions to $\mathcal{O}(10)$ -Reynolds numbers

No exact results for the stress distribution on a finite-length cylinder exists in the Stokes regime. Clift et al. [24] reported a detailed comparison of numerical and experimental results with empirical laws from the literature aimed at estimating the drag force on a cylinder aligned with the upstream flow. Approximating the cylinder geometry with a prolate spheroid of same volume yields a relative error up to 15% on the drag for small aspect ratios ($\chi \approx 2$). To provide a drag law valid for $\chi \gtrsim 2$, we start from the slender-body theory. This theory provides a convenient framework to compute the forces on a slender body under creeping-flow conditions through an expansion with respect to the small parameter $1/\ln(2\chi)$ for $\chi \gg 1$ [1, 2]. The solution corresponding to a straight circular fiber was obtained to third order by Batchelor [1] and Keller and Rubinow [25]. In appendix B, we improve over these predictions by computing explicitly the fourth-order term. In what follows, we compare this improved prediction with several sources, namely the numerical results of Youngren and Acrivos [26], present numerical results obtained for $\text{Re} = 0.05$, and experimental results by Heiss and Coull [27]. Figure 2 displays the drag force $F_d \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x$ on the body, normalized by the force F_{ds} on a sphere of same volume (*i.e.* with diameter $\mathfrak{D}/D = (\frac{3}{2}\chi)^{1/3}$), as a function of χ . Clearly, the second-order slender-body approximation (see appendix B) is quite inaccurate, even for large aspect ratios. The third-order approximation provides a better agreement, but significant deviations ($> 5\%$) still exist for $\chi = 20$. The fourth-order approximation computed in appendix B approaches the experimental and numerical results down to $\chi \approx 10$ significantly better. However, all slender-body approximations inherently diverge when $\chi \rightarrow 1/2$. Actually, Fig. 2 indicates that they are all inaccurate for $\chi \lesssim 5$; the higher the order of the expansion the larger the aspect ratio below which the slender-body approximation becomes inaccurate. To extend the domain of validity of the theoretical approximation towards short cylinders, we empirically correct the fourth-order approximation by introducing an *ad hoc* additional term. This term must attenuate the divergence of the slender-body approximation for $\chi \rightarrow 1/2$ and become negligible for $\chi = \mathcal{O}(10)$. Therefore we sought it in the form $\chi^{1/3}(\chi - 1/2)^{-p}$, in such a way that only a $(\chi - 1/2)^{-p}$ correction is introduced in the normalized force F_d/F_{ds} . The best fit with experimental and numerical data in the range $2 \leq \chi \leq 10$ is obtained with $p = 1.75$, a $\pm 3\%$ -difference on p leading to a significantly poorer agreement.

The full expression for the drag force incorporating this empirical term then reads

$$F_d^{\text{Re}=0} \approx 2\pi\mu LU \left(\frac{a^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a^{(2)}}{(\ln(2\chi))^2} + \frac{a^{(3)}}{(\ln(2\chi))^3} + \frac{a^{(4)}}{(\ln(2\chi))^4} - \frac{2.4}{\chi^{2/3}(\chi - \frac{1}{2})^{1.75}} \right), \quad (1)$$

with $U = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_x$ and the expressions for the $a^{(i)}$ as provided in appendix B. As Fig. 2 shows, the modified drag law fits the numerical and experimental results well for $\chi \gtrsim 2$. It still diverges for lower χ , but the drag is then close to that experienced by the equivalent sphere ($F_d/F_{ds} \leq 1.05$). Present numerical predictions in the range $3 \leq \chi \leq 10$ are also seen to agree well with results available in the literature. The slight deviation observed for $\chi = 20$ is not unexpected. Indeed, the Reynolds number based on the body length is of $\mathcal{O}(1)$ in this case, making inertial corrections to the drag significant (see below). The pressure component to the drag, F_{dp} , results from the difference between the pressure distributions on the upstream and downstream ends of the cylinder. Owing to the fore-aft symmetry of the flow in the Stokes regime, these two distributions only differ by the sign of the corresponding pressure, since $p(r, x = L/2) = -p(r, x = -L/2)$. Figure 3 displays the

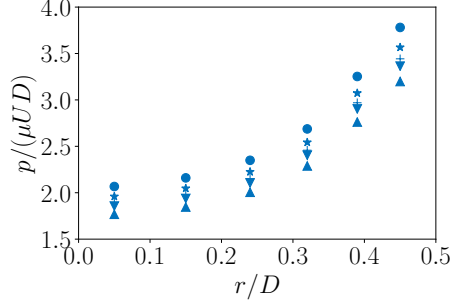


FIG. 3: Radial pressure distribution on the upstream end of the cylinder for $\text{Re} = 0.05$. \bullet : $\chi = 3$; \star : $\chi = 5$; $+$: $\chi = 7$; \blacktriangledown : $\chi = 10$; \blacktriangle : $\chi = 20$. The pressure is assumed to be zero in the far field.

radial pressure distribution on the upstream end. For each χ , the pressure is seen to increase with the distance r to the symmetry axis. At a given radial position, pressure variations are only mildly influenced by the aspect ratio, but this influence becomes larger as the lateral surface is approached.

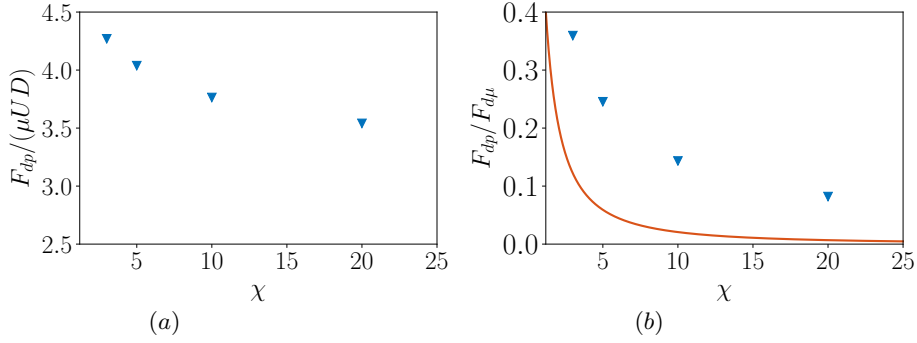


FIG. 4: Contributions to the drag force. (a): pressure contribution; (b): ratio of the pressure to the shear stress contributions. \blacktriangledown : numerical results for $\text{Re} = 0.05$; solid line: low-Re prediction (2) for a prolate spheroid.

Figure 4(a) indicates that F_{dp} only varies weakly with χ . It consistently decreases with the aspect ratio but its variation is less than 20 % from $\chi = 3$ to $\chi = 20$. Figure 4(b) shows the ratio of the pressure contribution to the viscous stress contribution to the drag as a function of χ . This ratio is close to $1/3$ for $\chi = 3$. Then it decreases gradually as χ increases, and becomes less than $1/10$ for $\chi = 20$. Hence, as expected from purely geometrical considerations, F_{dp} becomes negligible with respect to $F_{d\mu}$ for large χ . It is of some interest to compare this variation with that found for prolate spheroids, namely [28]

$$\frac{F_{dp}}{F_{d\mu}} = \frac{\chi \ln(\chi + (\chi^2 - 1)^{1/2}) - (\chi^2 - 1)^{1/2}}{\chi^2(\chi^2 - 1)^{1/2} - \chi \ln(\chi + (\chi^2 - 1)^{1/2})}. \quad (2)$$

As Fig. 4(b) indicates, the pressure drag decreases much more slowly with the aspect ratio in the case of a cylindrical body with flat ends. This difference underlines the importance of end effects even for long cylindrical bodies.

Next we consider the influence of inertial effects at low-to-moderate Reynolds number. The slender-body theory initially derived under Stokes flow conditions was extended to small-but-finite Reynolds numbers in [4], still assuming $\text{Re} \ll 1$ but considering that the Reynolds number based on the body length, χRe , may be arbitrarily large. Lopez and Guazzelli [29] and Roy et al. [30] provided experimental confirmations of the relevance of the finite-Re corrections derived in [4] by examining the settling of long fibers ($10 \lesssim \chi \lesssim 35$) in a Taylor-Green type vortical flow and the sedimentation of isolated fibers with $\chi = 20$ and 100 in a fluid at rest, respectively. Nevertheless, we are not aware of any detailed validation of the finite-Re theory of [4] in the case of a body aligned with the upstream flow. According to this theory (see also [29] and [30]), the drag force on a long cylindrical body aligned with the flow, disregarding terms of $\mathcal{O}((1/\ln \chi)^3)$ and higher, reads

$$F_d^{\chi\text{Re}=\mathcal{O}(1)} \approx 2\pi\mu LU \left(\frac{a^{(1)}}{\ln \chi} + \frac{a^{(2)} - \ln 2 + f_{\parallel}}{(\ln \chi)^2} \right), \quad (3)$$

where

$$f_{\parallel} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1(\chi\text{Re}) + \ln(\chi\text{Re}) - e^{-\chi\text{Re}} + \gamma + 1}{\chi\text{Re}} + E_1(\chi\text{Re}) + \ln(\chi\text{Re}) + \gamma - 2 \right), \quad (4)$$

with $E_1(X) = \int_X^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ (related to the exponential integral $\text{Ei}(X)$ through $E_1(X) = -\text{Ei}(-X)$), and γ the Euler constant. In the limit of small χRe , the inertial correction factor reduces to $f_{\parallel} \approx \frac{1}{8}\chi\text{Re}$. Note that in (1) and throughout the rest of the paper, the slender-body solution is expanded with respect to $1/\ln(2\chi)$, similar to [1], [3] and [25]. In contrast, an expansion with respect to $1/\ln(\chi)$ was used in [4]. Once truncated at the same order, the two formulations are of course equivalent for $\chi \gg 2$, but significant differences exist for moderate aspect ratios. This is why we keep the original formulation in (3) and in similar expressions of Sec. IV involving the inertial corrections derived in [4].

The main shortcoming of (3) is obviously the truncation at second order with respect to $1/\ln \chi$. This limitation is confirmed in Fig. 5, where the influence of inertial effects on the drag force is shown for cylindrical bodies with different aspect ratios. Significant deviations between numerical results and predictions of (3) are observed whatever Re and χ . It is thus desirable to include higher-order corrections with respect to $1/\ln(2\chi)$ to improve

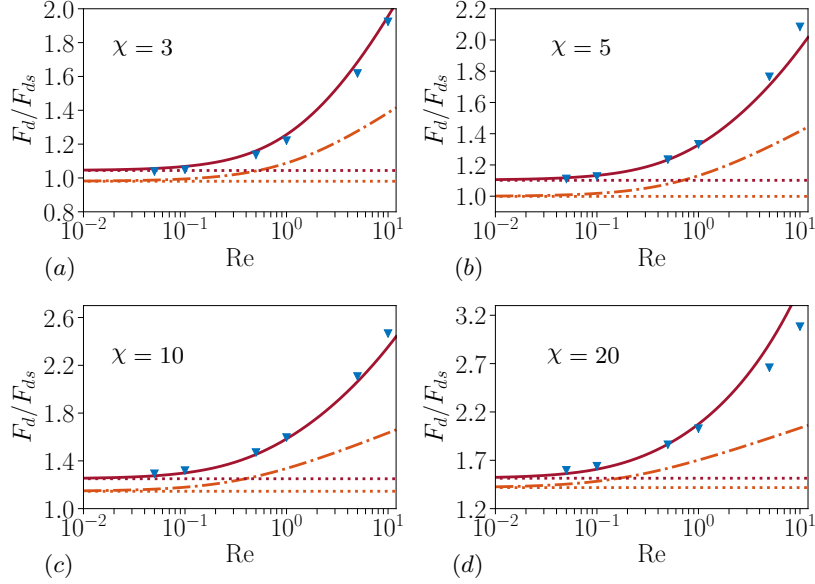


FIG. 5: Influence of inertial effects on the drag of finite-length cylinders aligned with the upstream flow. The drag is normalized by that of a sphere of same volume. \blacktriangledown : numerical results; solid line: semiempirical prediction (5); dash-dotted line: theoretical prediction (3); dotted line: predictions (1) (upper line) and (3) with $\text{Re} = 0$ (lower line).

the validity of (3). The analysis of [4] was recently extended to third order in [31] using the reciprocal theorem. However, the pre-factor of the third-order term is found in the form of a volume integral to be evaluated in Fourier space. To obtain a more straightforward formula accounting for small-but-finite inertial effects, we use present numerical results to empirically modify (3) by taking advantage of the higher-order corrections present in (1). The best agreement with the numerical results is obtained with the expression

$$F_d^{\chi\text{Re}=\mathcal{O}(1)} \approx 2\pi\mu LU \left[\frac{a^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a^{(2)} + f_{\parallel}}{(\ln(2\chi))^2} + \frac{a^{(3)} + f_3 f_{\parallel}}{(\ln(2\chi))^3} + \frac{a^{(4)} + f_4 f_{\parallel}}{(\ln(2\chi))^4} - \frac{2.4}{\chi^{2/3}(\chi - \frac{1}{2})^{1.75}} \right], \quad (5)$$

with $f_3 = (\chi\text{Re})^{0.07\chi^{0.5}}$ and $f_4 = (\chi\text{Re})^{0.03\chi^{0.9}}$. Predictions of (5) are compared with numerical results in Fig. 5. The agreement is found to be good up to $\text{Re} \approx 1$ whatever the aspect ratio. This is quite remarkable since the derivation of (5) assumes $\text{Re} \ll 1$ (but possibly $\chi\text{Re} \gtrsim 1$ since $\chi \gg 1$). Khair and Chisholm [31] also found that their analytical prediction agrees well with the numerically computed drag on a long prolate spheroid up to $\text{Re} \approx 2$ for $\chi = 10$.

B. From $\mathcal{O}(10)$ to $\mathcal{O}(4 \times 10^2)$ Reynolds numbers

Increasing the Reynolds number, we considered six aspect ratios ranging from 2 to 10 and twenty Reynolds numbers from $\text{Re} = 20$ to $\text{Re} = 400$. The flow past the cylinder was found to reach a steady state in all cases. Nevertheless, the flow structure revealed new features as the Reynolds number increases.

Figure 6(a) displays the streamlines around a cylinder with $\chi = 2$ for $\text{Re} = 140$. In this regime, the flow is attached to the body all along the lateral surface but the separation of the boundary layer at the downstream edge results in the generation of a toroidal eddy in the near wake. Simulations indicate that this standing eddy

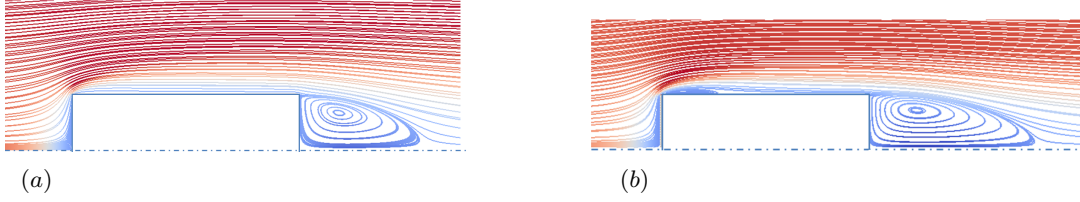


FIG. 6: Streamlines pattern for $\chi = 2$ colored with the magnitude of the axial velocity (from -0.25 to 1). (a) $\text{Re} = 140$; (b) $\text{Re} = 300$.

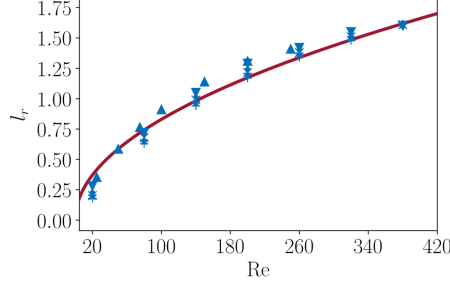


FIG. 7: Variation of the length l_r of the toroidal eddy vs. the Reynolds number past cylinders with different aspect ratios; l_r is measured along the symmetry axis, from the downstream end of the cylinder to the point at which the axial velocity changes sign. \blacktriangle : $\chi = 1$ from [23]; \blacktriangledown : $\chi = 2$; \bullet : $\chi = 3$; \times : $\chi = 4$; \star : $\chi = 5$; $+$: $\chi = 7$; solid line: $l_r(\text{Re}) = 0.083\text{Re}^{1/2}$.

sets in for $\text{Re} \approx 10$ for $\chi = 2$ and $\text{Re} \approx 20$ for $\chi = 7$. The length of the standing eddy is plotted in Fig. 7 as a function of the Reynolds number. Remarkably, it is found to be almost independent of χ and grows approximately as the square root of the Reynolds number.

As the Reynolds number increases, a thin secondary annular eddy sets in along the upstream part of the lateral surface of the body (Fig. 6(b)), owing to the detachment of the boundary layer along the upstream edge. The critical Reynolds number Re_{c0} beyond which this flow pattern is detected is a slowly increasing function of the aspect ratio: from $\text{Re}_{c0} \approx 180$ for $\chi = 2$, to $\text{Re}_{c0} \approx 200$ for $\chi = 5$, $\text{Re}_{c0} \approx 220$ for $\chi = 7$, until $\text{Re}_{c0} \approx 240$ for $\chi = 10$. It will be seen later that this secondary eddy has a strong influence on the viscous friction experienced by the cylinder

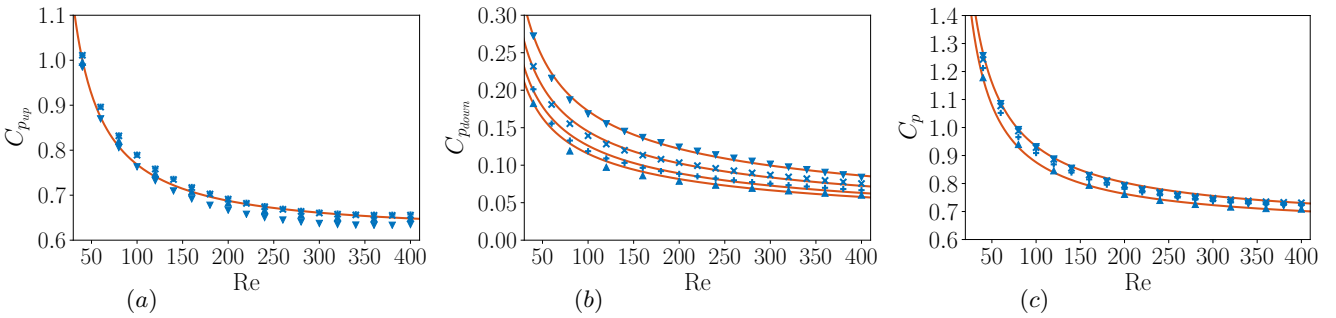


FIG. 8: Pressure drag coefficient C_p as a function of Re for different aspect ratios. (a): upstream end; (b): downstream end; (c): sum of the two contributions. \blacktriangledown : $\chi = 2$; \times : $\chi = 4$; $+$: $\chi = 7$; \blacktriangle : $\chi = 10$; solid line in (a): empirical fit (6); solid line in (b): empirical fit (7); solid line in (c): sum (6)+(7) for $\chi = 2$ (upper line) and $\chi = 10$ (lower line).

Figures 8(a) – (b) display the variation with Re of the pressure drag coefficient $C_p = 8F_{dp}/(\pi\rho D^2 U^2)$ on the upstream and downstream ends of the body for various χ . For each aspect ratio, both contributions decrease monotonically with Re . The pressure coefficient on the downstream end ($C_{p_{down}}$) is 3 – 4 times smaller than that on the upstream end ($C_{p_{up}}$) for $\text{Re} \approx 100$ and becomes only a small fraction of the latter for $\text{Re} \approx 400$. Moreover, $C_{p_{up}}$ is almost independent of χ (except for the shortest cylinder), while $C_{p_{down}}$ gradually decreases as the aspect ratio increases. Last, for $\chi > 2$ and $\text{Re} \gtrsim 300$, $C_{p_{up}}$ is seen to tend toward an almost constant value slightly larger than 0.6. Based on these remarks, approximate expressions for the two contributions take

the form

$$C_{p_{up}}(\chi, \text{Re}) \approx 0.62 + \frac{11.7}{\text{Re}^{0.9}(1 + 0.004\text{Re}^{0.9})} \quad (6)$$

$$C_{p_{down}}(\chi, \text{Re}) \approx 2.05\chi^{-1/4}\text{Re}^{-1/2} \quad (7)$$

As Fig. 8(c) confirms, numerical data for the total pressure drag coefficient $C_p = C_{p_{up}} + C_{p_{down}}$ are accurately fitted by the sum of (6) and (7). Figure 9(a) displays the variation of the viscous drag coefficient, $C_\mu(\chi, \text{Re})$.

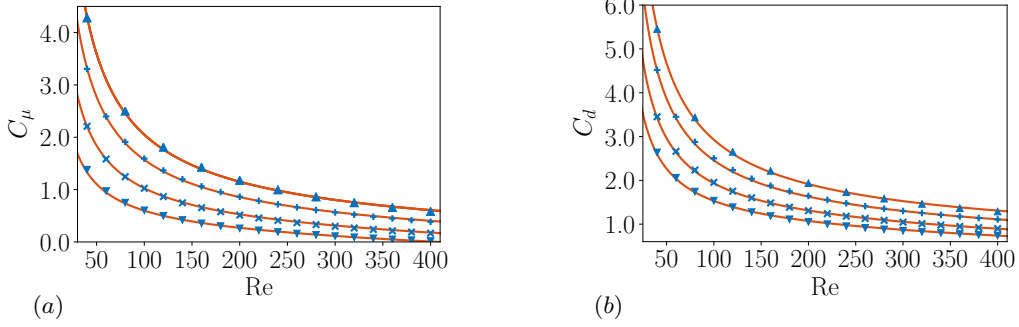


FIG. 9: Drag coefficient as a function of Re for different aspect ratios. (a): viscous contribution C_μ ; (b): total drag coefficient C_d . \blacktriangledown : $\chi = 2$; \times : $\chi = 4$; $+$: $\chi = 7$; \blacktriangle : $\chi = 10$; for each aspect ratio, the solid lines in (a) and (b) represent the fits (8) and (9), respectively.

This contribution is seen to be an increasing function of χ . Indeed, the area of the lateral surface of the body may be expressed in the form $\pi D^2 \chi$. Hence the normalized viscous force $C_\mu = 8F_{d\mu}/(\pi\rho D^2 U^2)$ is expected to increase almost linearly with the aspect ratio. As usual, C_μ is also a decreasing function of the Reynolds number. However, the observed decrease is much steeper than the classical $\text{Re}^{-1/2}$ behavior expected on the basis of the boundary layer theory. The reason for this stands in the presence of the secondary annular eddy along the lateral surface. The corresponding backflow generates a negative local shear stress which lowers the overall viscous drag. For sufficiently short cylinders and large enough Reynolds numbers, this negative contribution may exceed the positive contribution of the shear stress on the rest of the lateral surface, yielding an overall negative viscous drag. This change of sign takes place at $\text{Re} \approx 420$ for $\chi = 2$. Based on the previous findings, a simple fit for C_μ is found to be

$$C_\mu(\chi, \text{Re}) \approx 16.45\chi^{0.7}\text{Re}^{-0.8} + (a_1\chi - a_2)\text{Re}, \quad \text{with} \quad a_1 = 4.1 \times 10^{-5} \quad \text{and} \quad a_2 = 6 \times 10^{-4}. \quad (8)$$

As Fig. 9(a) shows, the above fit describes the variations of C_μ well throughout the entire range of aspect ratios and Reynolds numbers explored numerically. The last term in the right-hand side of (8) accounts for the influence of the annular eddy. Note that according to (8), the dependence of C_μ with respect to χ is slightly weaker than expected on the basis of the above simple geometrical argument.

As Figs. 8 and 9 evidence, pressure effects contribute less to the drag than viscous friction for $\text{Re} \lesssim 100$. For Reynolds numbers in the range $100 \lesssim \text{Re} \lesssim 300$ and short cylinders ($\chi \leq 4$), both contributions have a comparable magnitude. However, due to the sharp decrease of the viscous contribution for $\text{Re} \gtrsim 400$ for such short cylinders, the latter eventually becomes smaller than the pressure contribution in the upper part of the Re-range covered by present computations. Adding the approximate expressions (6), (7) and (8), the total drag coefficient is approached as

$$C_d(\chi, \text{Re}) \approx C_{p_{up}}(\chi, \text{Re}) + C_{p_{down}}(\chi, \text{Re}) + C_\mu(\chi, \text{Re}). \quad (9)$$

As Fig. 9(b) indicates, this fit is in good agreement with the numerically predicted drag throughout the range of χ and Re covered by the simulations. Note that the upper limit of validity of this fit is presumably $\text{Re}_{max} \approx 400$. In particular, the linear variation of C_μ with Re predicted by (8) cannot continue at very large Reynolds number, as the drag coefficient is expected to decrease with Re for $\text{Re} > \text{Re}_{max}$ and become Re-independent in the limit $\text{Re} \rightarrow \infty$. Conversely, it may be checked that the above fit properly matches the modified low-but-finite Re prediction (5). Consider for instance a cylinder with $\chi = 7$ and $\text{Re} = 5$. On the one hand, (6)-(9) predict $C_d \approx 21.6$ for this set of parameters. On the other hand, according to Fig. 5, the ratio F_d/F_{ds} predicted by (5) is approximately 1.85. Keeping in mind that the diameter D of the equivalent sphere is related to D through $D/D = (\frac{3}{2}\chi)^{1/3}$, one has $C_d = 24\text{Re}^{-1}(\frac{3}{2}\chi)^{1/3}F_d/F_{ds} \approx 21.9$. Similarly, for the same Reynolds number but $\chi = 20$, one has $C_d \approx 40.7$ from (6)-(9) and $C_d \approx 40.3$ from Fig. 5 where $F_d/F_{ds} \approx 2.70$. This agreement, which is confirmed with other sets of parameters, allows us to conclude that combining (5) for Reynolds numbers less than a few units with (6)-(9) for larger Re provides an accurate description of drag variations from $\text{Re} = 0$ up to $\text{Re} = 400$.

IV. FORCES AND TORQUE ON A MODERATELY INCLINED CYLINDER AT LOW-TO-MODERATE REYNOLDS NUMBER

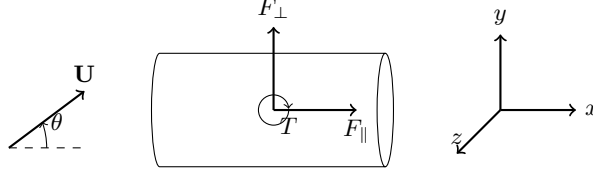


FIG. 10: Schematic of the force components on an inclined cylinder. In this configuration, the inertial torque is negative, tending to rotate the cylinder clockwise.

We now move to the more general configuration in which the cylinder is inclined with respect to the incoming flow by a nonzero angle. For reasons discussed in Sec. I, we limit ourselves to maximum inclinations of 30° . The present section focuses on the low-to-moderate Reynolds number range $[0.1 - 5]$. Higher Reynolds numbers are considered in the next section.

The nonzero inclination breaks the flow axial symmetry. Therefore, in addition to the force component F_{\parallel} parallel to the cylinder axis, a perpendicular force component (F_{\perp}) takes place, together with a spanwise torque (T) (Fig. 10). These components are linearly related to the drag and lift forces F_d and F_l , respectively parallel and perpendicular to the incoming velocity \mathbf{U} , via the geometric relations

$$F_{\parallel}(\chi, \theta, \text{Re}) = F_d(\chi, \theta, \text{Re}) \cos \theta - F_l(\chi, \theta, \text{Re}) \sin \theta, \quad (10)$$

$$F_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re}) = F_l(\chi, \theta, \text{Re}) \cos \theta + F_d(\chi, \theta, \text{Re}) \sin \theta. \quad (11)$$

In the Stokes regime, the linearity of the loads with respect to the boundary conditions implies that the force acting on the inclined cylinder is linearly related to the drag acting on the same body in the two extreme configurations $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 90^\circ$ through

$$F_{\parallel}(\chi, \theta) = F_{\parallel}^{\theta=0^\circ}(\chi) \cos \theta, \quad (12)$$

$$F_{\perp}(\chi, \theta) = F_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi) \sin \theta. \quad (13)$$

These simple ‘Stokes laws’ are not expected to remain valid when inertial effects become significant. To assess and possibly extend their validity, an approximate expression for $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}$, similar to (5) for F_{\parallel} , is required. In appendix C, we establish the fourth-order slender-body approximation of $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi, \text{Re} = 0)$, and modify it empirically to extend its validity toward aspect ratios and Reynolds numbers of $\mathcal{O}(1)$. To get some insight into the way inertial effects alter (12)-(13), it is informative to consider the finite-Reynolds-number approximate expressions for F_d and F_l established for arbitrary inclinations by Khayat and Cox [4]. Evaluating these expressions in the limit $\chi \text{Re} \ll 1$ and making use of (10)-(11) yields

$$\frac{F_{\parallel}(\chi, \theta, \chi \text{Re} \ll 1)}{2\pi\mu UL} \approx \left(F_{\parallel}^{*\theta=0^\circ}(\chi, \chi \text{Re} \ll 1) - \frac{1}{16} \sin^2 \theta \frac{\chi \text{Re}}{(\ln \chi)^2} \right) \cos \theta, \quad (14)$$

$$\frac{F_{\perp}(\chi, \theta, \chi \text{Re} \ll 1)}{4\pi\mu UL} \approx \left(F_{\perp}^{*\theta=90^\circ}(\chi, \chi \text{Re} \ll 1) + \frac{1}{16} \cos^2 \theta \frac{\chi \text{Re}}{(\ln \chi)^2} \right) \sin \theta, \quad (15)$$

where F_{\parallel}^* and F_{\perp}^* stand for the dimensionless second-order expansion of the corresponding force with respect to $1/\ln \chi$ in the limit of low-but-finite χRe , as provided by (3) and (C3), respectively. According to (3) and the asymptotic form of the inertial correction f_{\parallel} in the limit $\chi \text{Re} \rightarrow 0$, one has $F_{\parallel}^{*\theta=0^\circ}(\chi, \chi \text{Re} \ll 1) = [\ln \chi]^{-1} + (\frac{3}{2} - 2\ln 2 + \frac{1}{8}\chi \text{Re})[\ln \chi]^{-2}$. Similarly, (C3) and the asymptotic form of f_{\perp} yield $F_{\perp}^{*\theta=0^\circ}(\chi, \chi \text{Re} \ll 1) = [\ln \chi]^{-1} + (\frac{1}{2} - 2\ln 2 + \frac{1}{4}\chi \text{Re})[\ln \chi]^{-2}$. Expressions (14)-(15) indicate that the angular dependence of F_{\parallel} and F_{\perp} becomes more complex in the presence of inertial effects, involving higher-order harmonics of θ . Moreover they suggest that the θ -dependent inertial corrections tend to decrease F_{\parallel} and increase F_{\perp} , compared to the prediction of the extrapolated ‘Stokes law’ based on the finite-Re drag forces $F_{\parallel}^{*\theta=0^\circ}$ and $F_{\perp}^{*\theta=90^\circ}$.

Still in the Stokes regime, the spanwise torque is zero whatever θ , owing to the geometrical symmetries of the cylinder and the reversibility of Stokes equations. However, nonlinearities inherent to inertial effects result in a finite torque. In the limit $\text{Re}\chi \ll 1$, the finite-Reynolds-number expression for this torque obtained in [4] reduces to

$$\frac{T(\chi, \theta, \chi \text{Re} \ll 1)}{\mu U (L/2)^2} \approx -\frac{5\pi}{12} \frac{\chi \text{Re}}{(\ln \chi)^2} \sin 2\theta. \quad (16)$$

This negative torque tends to rotate the cylinder perpendicular to the flow direction.

In what follows we make use of the numerical results to examine the validity of ‘Stokes laws’ (12)-(13) and of the predictions of [4] for low-to-moderate Reynolds numbers.

Figure 11 displays the parallel force component F_{\parallel} for three Reynolds numbers and aspect ratios $\chi = 3, 5, 10$

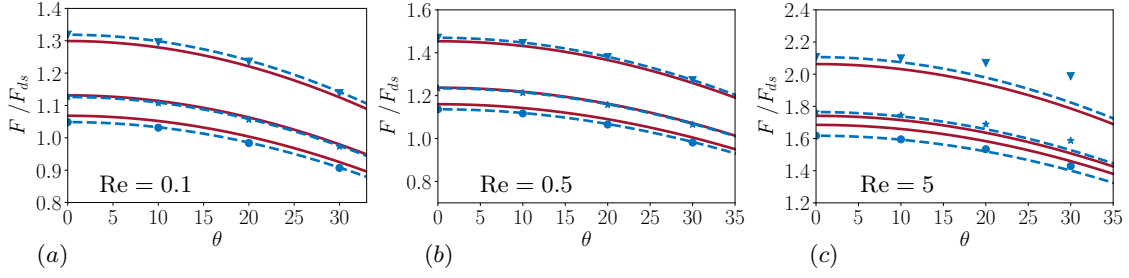


FIG. 11: Parallel force component F_{\parallel} vs. the inclination angle θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacktriangledown : $\chi = 10$. Dashed line: prediction (12) based on the numerical value of $F_{\parallel}^{\theta=0^\circ}$; solid line: prediction (12) based on the semiempirical approximation (5) for $F_{\parallel}^{\theta=0^\circ}$. and 10, respectively. At the lower two Re, variations of F_{\parallel} closely follow the $\cos \theta$ -behavior predicted by (12) whatever the aspect ratio. This implies that the $\sin^2 \theta$ -inertial correction in (14) has only a marginal influence at moderate inclinations for $\chi \text{Re} \lesssim 5$. Indeed, for $\theta = 30^\circ$, this correction is less than 2% of $F_{\parallel}^{\theta=0^\circ}$ whatever the aspect ratio. However, the inertial correction included in F_{\parallel}^* reaches 16% for $\chi = 10$, indicating that inertial effects are already significant. In other words, in the range of moderate inclinations considered here, the ‘Stokes law’ still accurately predicts $F_{\parallel}(\chi, \theta, \text{Re})$ for $\text{Re} \lesssim 1$, provided the prediction makes use of the inertia-corrected drag $F_{\parallel}^{\theta=0^\circ}(\chi, \text{Re})$.

At $\text{Re} = 5$, influence of inertial effects has become dominant. Since the magnitude of θ -dependent inertial correction also increases with $\text{Re}\chi$, the larger the aspect ratio the stronger these effects at a given Re. This may be appreciated in Fig. 11(c), where the difference between the computed force and the prediction of the ‘Stokes law’ is seen to increase significantly with χ for $\theta > 10^\circ$, from less than 2% for $\chi = 3$ at $\theta = 30^\circ$ to 9% for $\chi = 10$ at the same inclination. Interestingly, the under-prediction of F_{\parallel} by the Stokes law is at odds with the low- χRe prediction (14) which suggests that this ‘law’ should overestimate F_{\parallel} , since it ignores the negative $\sin^2 \theta$ -inertial contribution. This contradiction emphasizes the fact that the θ -dependences of inertial effects in the low- χRe range and in the range $10 \lesssim \chi \text{Re} \lesssim 10^2$ are drastically different.

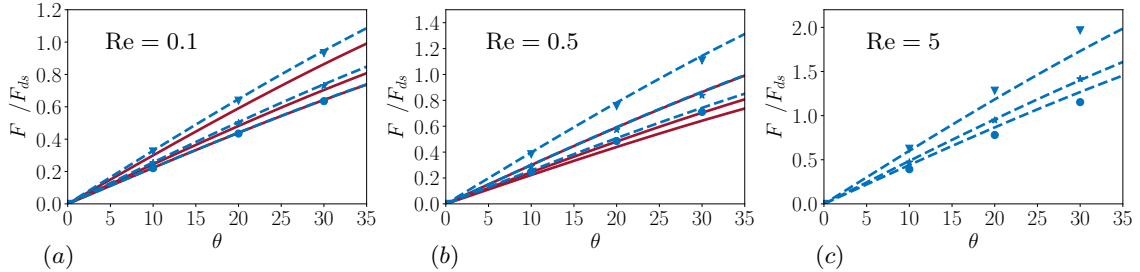


FIG. 12: Perpendicular force component F_{\perp} as a function of θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacktriangledown : $\chi = 10$. Solid line: ‘Stokes law’ (13) based on the semiempirical creeping-flow estimate (C2) for $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi)$; dashed line: same with $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}$ based on the semiempirical finite-Re estimate (C4). In (a), the two estimates overlap for $\chi = 3$; in (b), the prediction for $\chi = 10$ based on (C2) overlaps with that for $\chi = 5$ based on (C4).

Figure 12 shows the variations of the perpendicular force component in the same low-to-moderate Re-range. At $\text{Re} = 0.1$ (Fig. 12(a)), F_{\perp} is accurately approximated for the two cylinders with $\chi = 3$ and $\chi = 5$ by the ‘Stokes law’ based on the creeping-flow prediction (C2) for $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi)$. This is no longer the case for $\chi = 10$, where a significant underestimate may be noticed. In this case, the length-based Reynolds number χRe is unity, implying that inertial effects are already significant. This is why the Stokes law based on the composite expression (C4) for $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}$, which incorporates the inertial correction derived in [4], closely approaches the numerical data set. The validity of the Stokes law based on (C4) is maintained for $\text{Re} = 0.5$ whatever the aspect ratio. For $\text{Re} = 5$ (Fig. 12(c)), predictions of the same law are found to deviate significantly from numerical results, overestimating F_{\perp} by more than 10% for $\chi = 3$ and underestimating it by a similar percentage for $\chi = 10$. This is no surprise, since the inertial corrections involved in (C4) are based on the finite-Re theory of [4] which assumes $\text{Re} \ll 1$. In this respect, the deviations observed in Fig. 12(c) may even be considered as surprisingly small.

Variations of the spanwise torque with χ , θ and Re are displayed in Fig. 13. As expected, the torque is negative, tending to orient the cylinder broadside on. Variations with the cylinder inclination closely follow

the $\sin 2\theta$ -dependence predicted in the low- χRe limit by (16). The magnitude of the torque increases with the Reynolds number, in line with its inertial nature. For a given Re , the shorter the cylinder the stronger the normalized torque. Numerical results are compared with the full theoretical prediction of Khayat and Cox [4], namely

$$\frac{T(\chi, \theta, \text{Re} \ll 1)}{\mu U (L/2)^2} = \frac{2\pi}{(\ln \chi)^2} \left\{ \cos \theta \left[\mathcal{Z}(X) - \frac{E_1(X) + \ln X + \gamma}{X} + \mathcal{Z}(Y) - \frac{E_1(Y) + \ln Y + \gamma}{Y} \right] + \mathcal{Z}(Y) - \mathcal{Z}(X) \right\} \sin \theta + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(\ln \chi)^3} \right), \quad (17)$$

where $\mathcal{Z}(X) = \frac{2}{X} \left(1 + \frac{e^{-X}-1}{X} \right)$, $X = \frac{1}{2}\chi\text{Re}(1 - \cos \theta)$, $Y = \frac{1}{2}\chi\text{Re}(1 + \cos \theta)$ and E_1 and γ as defined in (4). According to Fig. 13, this prediction closely approaches the numerical results for the longest cylinder up to $\text{Re}=0.5$, together with those for the intermediate cylinder at $\text{Re} = 0.1$. It is no surprise that the low-but-finite Re theory is unable to provide a reasonable prediction for any of the three cylinders at $\text{Re} = 5$. In their experiments, Roy et al. [30] considered cylindrical fibers with $\text{Re} \approx 0.15$. With $\chi = 20$ they found the theory of [4] to over-predict the torque by more than 20% for $\chi = 20$ at $\theta = 30^\circ$, and to slightly under-predict it (by 7–8%) for $\chi = 100$. Present results provide a stronger support to the theory, since the difference observed in Fig. 13(a) is only of the order of 5% for $\chi = 10$ and clearly decreases with increasing χ . The fact that the asymptotic prediction, in which terms of $\mathcal{O}((\ln \chi)^{-3})$ are neglected, correctly estimates the torque on a $\chi = 5$ cylinder at $\text{Re} = 0.1$ but not at $\text{Re} = 0.5$, while it still provides an accurate prediction at the same Reynolds number for $\chi = 10$ is noticeable. It suggests that the conditions $\text{Re} \ll 1$ and $\chi \gg 1$ on which the asymptotic prediction is grounded must rather be understood as $\text{Re} \ll 1$ and $\text{Re}/\chi^2 \ll 1$. Indeed, the ratio Re/χ^2 stands below 0.005 in all three configurations correctly predicted by (17), while it is beyond 0.01 in all other cases. For practical purposes, we sought an empirical fit of the torque valid for long enough cylinders and reducing to (16) (the limit form of (17)) for $\chi\text{Re} \rightarrow 0$. As all three panels in Fig. 13 indicate, numerical data corresponding to $\chi = 10$ and $\chi = 5$ are accurately approached by the formula

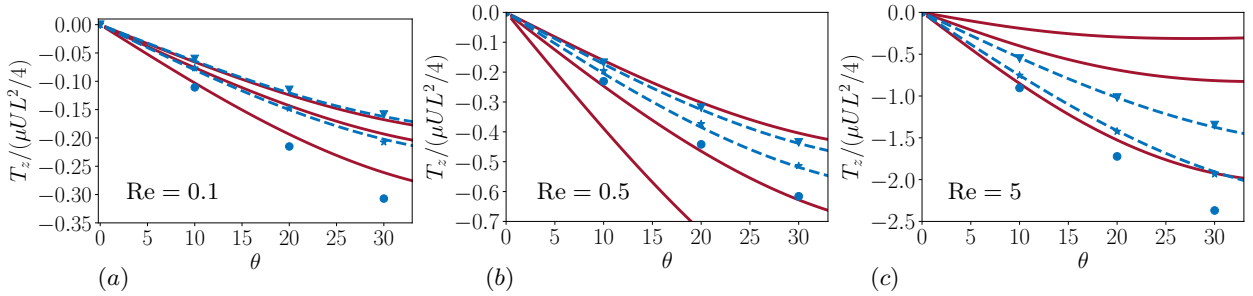


FIG. 13: Torque as a function of θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacktriangledown : $\chi = 10$. Solid line: asymptotic prediction (17) for low-but-finite Re ; dashed line: approximate fit (18) for $\chi = 5$ and 10.

$$\frac{T(\chi \gg 1, \theta, \text{Re})}{\mu U (L/2)^2} \approx -\frac{5\pi}{12} \frac{\text{Re}}{(1 + \chi\text{Re}^{1.1})^{0.5}} \left\{ \frac{\chi}{(\ln \chi)^2} + \frac{13.5 - 30 \text{Re}^{1/2}}{\chi (\ln \chi)^3} e^{-0.7\text{Re}} \right\} \sin 2\theta. \quad (18)$$

The $\mathcal{O}(\chi^{-1}(\ln \chi)^{-3})$ -term only provides a marginal contribution for $\chi = 10$. Consequently the leading-order $\mathcal{O}(\chi(\ln \chi)^{-2})$ -truncation of (18) is sufficient to correctly estimate the torque on cylindrical fibers with $\chi \gtrsim 10$ up to $\text{Re} = 5$. A correction proportional to $(\ln \chi)^{-4}$ may certainly be incorporated in (18) to properly estimate the torque on very short cylinders.

V. FULLY INERTIAL STATIONARY REGIME

As pointed out in Sec. IIIB, the flow past a cylinder aligned with the incoming velocity is stationary and axisymmetric within the full range of Re investigated here. Although the axial symmetry breaks down when θ is nonzero, the flow remains stationary up to a critical Reynolds number, $\text{Re}_c(\chi, \theta)$, larger than 300. Details on the first unsteady regimes that take place beyond this threshold are provided as Supplemental Material. Here we concentrate on the stationary non-axisymmetric regime extending from Reynolds numbers of $\mathcal{O}(10)$ up to Re_c . To limit the computational cost, simulations in this regime were only carried out for cylinders with aspect ratios $\chi = 3, 5$ and 7. However, the results to be discussed hereinafter suggest that the flow structure and loads are only weakly affected by finite-length effects beyond $\chi \approx 5$ in this range of Reynolds number, although the inertial load coefficients defined below may well continue to depend on χ , even for $\chi \gg 1$. Consequently, the physical phenomena involved and the simulation-based approximate expressions for the loads provided below

are expected to apply without significant changes to cylinders with $\chi \gg 1$, which makes them relevant to analyze the motion of long cylindrical fibers in inertia-dominated regimes.

In Sec. IIIB, we showed that, for Reynolds numbers of $\mathcal{O}(10^2)$, the flow structure past a cylinder aligned with the incoming velocity exhibits the presence of a thin annular standing eddy along the upstream part of the lateral surface. This feature was found to significantly influence the drag force, being able to change the sign of the viscous drag for sufficiently short cylinders and large Reynolds numbers. The situation is qualitatively similar in the (θ, Re) -range considered hereinafter since, for large enough inclinations and Reynolds numbers, the flow field exhibits specific features which directly affect the loads on the body. Consequently, it is relevant to examine first how the flow close to the body varies with the control parameters, which is the purpose of Sec. VA. Then, the possibility to use numerical data to derive simple laws for the force components is considered in Sec. VB, before empirical fits for the axial force and spanwise torque are built in Sec. VC.

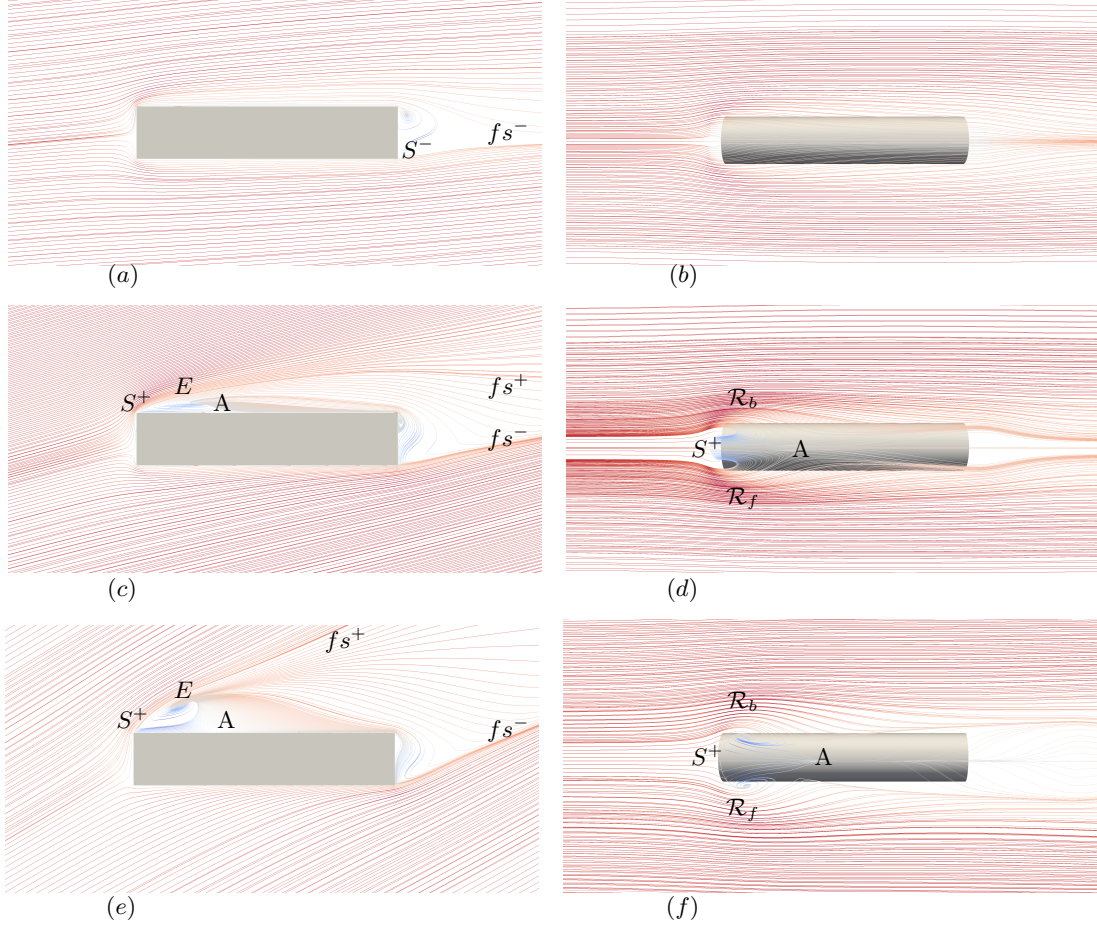


FIG. 14: Streamlines in the symmetry plane $z = 0$ (left) and in the plane $y = D/2$ tangent to the lateral surface along the top generatrix (right) for a cylinder with $\chi = 5$ at $\text{Re} = 140$. Streamlines are colored according to the magnitude and sign of the axial velocity from -0.25 (deep blue) to $+1$ (deep red). (a) – (b): $\theta = 5^\circ$; (c) – (d): $\theta = 15^\circ$; (e) – (f): $\theta = 30^\circ$.

A. Flow structure

Throughout the regime under consideration, the flow field exhibits a mirror symmetry with respect to the (x, y) -plane which contains both the body axis and the incoming velocity. Figure 14 helps to understand how the flow structure past the cylinder varies with the inclination angle. Several generic features emerge. First, the front stagnation point standing in the symmetry plane $z = 0$ is seen to move downward (*i.e.* toward negative y) as θ increases, almost reaching the bottom generatrix ($y = -D/2$) for $\theta = 30^\circ$ whatever Re . At the back of the body, the fluid that has passed over the upper part of the lateral surface is entrained downwards. It recirculates toward the downstream end within a region whose length in the streamwise (x) direction is typically of the order of the cylinder radius for $\text{Re} = 140$. Examination of this recirculating region at other Reynolds numbers (not shown) indicates that its length increases gradually with Re , becoming of the order of D for $\text{Re} = 300$. Unlike the standing eddy existing in the axisymmetric configuration (Sec. IIIB), this recirculating zone is no longer a closed toroid. Indeed, once the fluid entrained downward gets very close to the lowest generatrix (point

S^- in Fig. 14(a)), it is expelled downstream in the main flow, just above the open streamline fs^- emanating from S^- . Out of the symmetry plane, the three-dimensional streamlines displayed in Fig. 15 (for $\text{Re} = 300$, to magnify the regions in which the fluid recirculates) reveal that fluid particles entrapped in the recirculating region describe successive loops before being sucked into the wake and advected downstream. This scenario is similar to that observed in [32] at the back of a sphere in the first (steady) non-axisymmetric wake regime.

For $\text{Re} = 140$ and $\theta = 5^\circ$ (Fig. 14(a)), the flow along the body remains attached everywhere to the lateral surface. The lower (resp. higher) the Reynolds number, the larger (resp. smaller) the critical inclination at which separation occurs along the upper part of this surface. For instance, the flow is still unseparated at $\theta = 15^\circ$ for $\text{Re} = 40$ but is already separated at $\theta = 5^\circ$ for $\text{Re} = 300$. Separation starts at the intersection of the upstream end and the upper generatrix (point S^+ in Figs. 14(c) – (f)). Beyond the corresponding critical θ and/or Re , separation takes place over an open surface of finite extent, the most downstream point of which (point A in Figs. 14(c) – (f)) stands on the symmetry plane. Still in the plane $y = D/2$, the separating line starting at A develops upstream on the sides of the cylinder (regions \mathcal{R}_b and \mathcal{R}_f in Figs. 14(d) and (f)) before joining the incoming flow. Not visible in Fig. 14, the lower part of the separation surface ($y < D/2$) on the sides of the cylinder exhibits a structure qualitatively similar to that of regions \mathcal{R}_b and \mathcal{R}_f and ends in some intermediate plane $0 < y < D/2$, the position of which depends on θ and Re . Moving away from the lateral surface above the upper generatrix ($y > D/2$), the extent of the separation surface in the spanwise direction decreases gradually until its trace reduces to a single point some distance above the cylinder. This apex (point E in Figs. 14(c) and (e)) looks like the ‘eye of the storm’ of the separated region. The larger θ and Re , the larger the distance between points S^+ and E in both the x - and y -directions. Fluid is brought in the neighborhood of E from both sides of the cylinder in a way similar to that observed in Figs. 14(d) and (f) in the plane $y = D/2$ (see Fig. 15). Then it is sent back toward the upstream end in between the ‘eye’ and the cylinder. The dividing streamline joining the region of the ‘eye’ to point A gets very close to the uppermost point S^+ of the upstream end. There, fluid particles are deviated by the ‘fresh’ fluid flowing along the free streamline fs^+ and advected downstream, just below this free streamline. Streamlines that pass closer to the ‘eye’ stay further away from the cylinder surface within the recirculating region. Consequently they also stay further away from fs^+ once they escape this region, the corresponding fluid filling the intermediate region in between fs^+ and the cylinder at the back of the separation surface. Overall, the flow past the cylinder looks massively separated in between the free streamlines fs^- and fs^+ , the position of the ‘eye’ governing the flow structure in the intermediate region. A similar open separation configuration was recently observed over inclined prolate spheroids in the range $5 \leq \text{Re} \leq 100$ in [33].

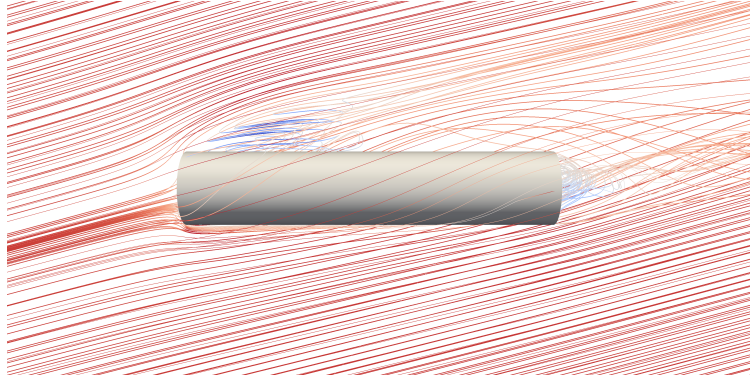


FIG. 15: Three-dimensional streamlines past an inclined cylinder with $\chi = 5$, $\theta = 15^\circ$ and $\text{Re} = 300$.

B. Are ‘Stokes laws’ valid for inclined cylinders at moderate-to-large Reynolds number?

We now make use of the numerical results to build approximate force and torque laws valid for $|\theta| \lesssim 30^\circ$ and $\text{Re} \gtrsim 10$ in the stationary non-axisymmetric flow regime. For this purpose, we characterize the force components through the parallel and perpendicular force coefficients defined *via* the identity $(F_\perp, F_\parallel) \equiv (C_\perp, C_\parallel)\rho U^2 L D/2$. Similarly, we introduce the torque coefficient C_t related to the spanwise torque T through $T \equiv C_t \rho U^2 L^2 D$.

To assess the validity of the ‘Stokes laws’ in this regime, we inject the numerical results in (10)-(11) and compare the resulting $C_\parallel(\chi, \theta, \text{Re})$ and $C_\perp(\chi, \theta, \text{Re})$ with the predictions of (12)-(13) at the relevant Reynolds number and aspect ratio. To achieve this comparison, the two coefficients $C_\parallel^{\theta=0^\circ}$ and $C_\perp^{\theta=90^\circ}$ are required for every value of χ and Re . $C_\parallel^{\theta=0^\circ}(\chi, \text{Re})$ is directly related to the drag determined in Sec. III up to a normalization factor. More specifically, in the Re -range considered in Sec. IIIB, C_\parallel and the drag coefficient C_d resulting from (6)-(9) are linked through the relation $C_\parallel^{\theta=0^\circ}(\chi, \text{Re}) = \frac{\pi}{4}\chi^{-1}C_d(\chi, \text{Re})$. At lower Reynolds number, $C_\parallel^{\theta=0^\circ}$ is readily obtained through the approximate expression (5) as $C_\parallel^{\theta=0^\circ}(\chi, \text{Re}) = 4\pi\text{Re}^{-1}\mathcal{F}(\chi, \text{Re})$,

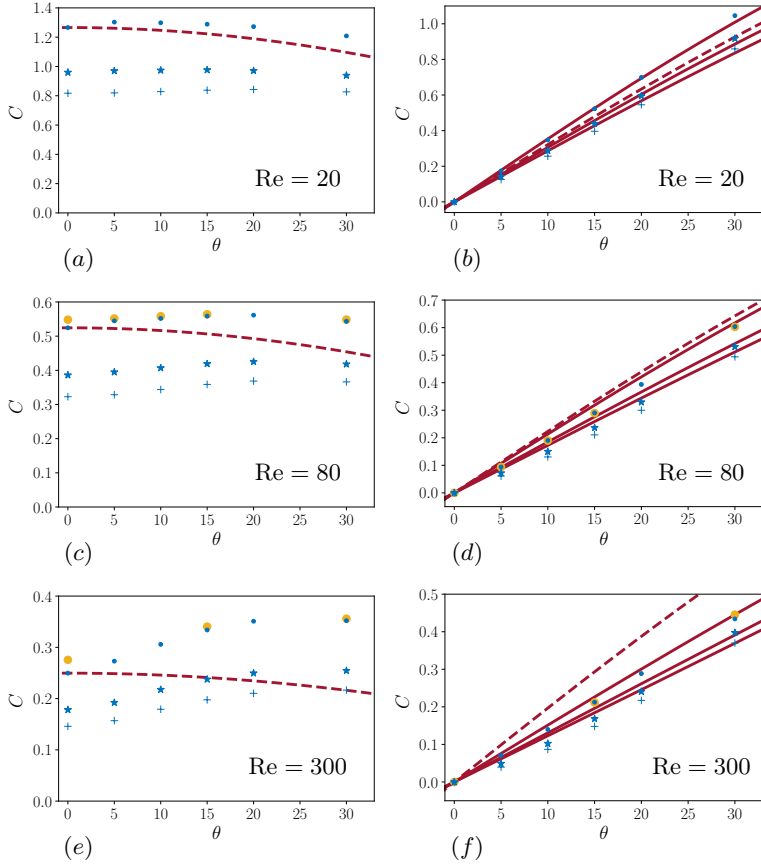


FIG. 16: Parallel and perpendicular force coefficients (C_{\parallel}, C_{\perp}) vs. θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$.

Dashed lines: ‘Stokes laws’ (12)-(13) based on the value of $C_{\parallel}^{\theta=0^\circ}$ ($\chi = 3$) and $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}$ ($\chi \gg 1$) at the relevant Reynolds number; solid line: approximate fit (20). The yellow bullets in panels (c) – (d) and (e) – (f) refer to the results of [13] for $\chi = 3$ at $Re = 75$ and 250 , respectively.

where $\mathcal{F}(\chi, Re)$ denotes the quantity within brackets in (5). A direct graphical estimate of $\mathcal{F}(\chi, Re)$ is provided for several aspect ratios in Fig. 5, noting that the relation between $\mathcal{F}(\chi, Re)$ and the normalized drag F_d/F_{ds} is $\mathcal{F}(\chi, Re) = \left(\frac{81}{16}\chi^{-2}\right)^{1/3} F_d/F_{ds}$.

Since we did not compute the loads on a cylinder held perpendicular to the flow, we use data from the literature to estimate $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi, Re)$. A large number of experimental data obtained with long cylinders was compiled in [34]. The corresponding curves for the drag per unit length were fitted in [24] in the form

$$C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, Re) \approx 9.69Re^{-0.78}(1 + aRe^n), \quad (19)$$

with $a = 0.227$ and $n = 0.55$ for $5 < Re \leq 40$, and $a = 0.084$ and $n = 0.82$ for $40 < Re \leq 400$, respectively. Comparisons between predictions of (19) and experimental results from [35] for finite-length cylinders falling perpendicular to their axis indicate that the drag is only marginally affected by end effects as soon as $\chi \gtrsim 2$ and $Re \gtrsim 10$ [24]. This is why we consider that (19) provides a relevant estimate of $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi, Re)$ throughout the range of aspect ratios and Reynolds numbers of interest here.

The resulting comparison between numerical results and predictions of (12)-(13) is presented in Fig. 16. The parallel force coefficients are seen to decrease significantly as χ increases. In Sec. III, where the drag was normalized using the frontal area $\pi D^2/4$, we found that the pressure contribution to the drag in the configuration $\theta = 0^\circ$ is almost independent of χ . For this reason, the corresponding contribution to $C_{\parallel}^{\theta=0^\circ}(\chi, Re)$, which involves a normalization by LD , behaves as χ^{-1} and is responsible for the most part of the large variations of $C_{\parallel}(\chi, \theta, Re)$ with χ observed in Figs. 16(a), (c), (e). Variations of C_{\parallel} with θ are remarkable in that they clearly contradict the ‘Stokes law’. Indeed, it is seen that C_{\parallel} is almost independent of θ for $Re = 20$ (apart from a modest decrease at $\theta = 30^\circ$ for $\chi = 3$), while it increases with the cylinder inclination for larger Reynolds numbers. Still modest for $Re = 80$, this increase makes C_{\parallel} 40 – 50% larger for $\theta = 30^\circ$ than for $\theta = 0^\circ$ at $Re = 300$. Clearly the ‘Stokes law’ (12) is unable to reproduce the observed trends.

The situation is markedly different with the perpendicular force coefficient, which is found to follow closely the $\sin\theta$ -dependence predicted by (13) throughout the entire range of θ and Re . Moreover, C_{\perp} only mildly varies with the aspect ratio, with less than 20% differences between the shortest and longest cylinders whatever

Re (Figs. 16(b), (d), (f)). However, it is also clear from these panels that the predictions of (13) based on the expression (19) for $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re})$ over-predict $C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re})$ for the highest two Reynolds numbers, the overestimate increasing with Re. This is actually no surprise, since in the Re-range considered here, the flow structure past an inclined cylinder with $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ has little in common with that past a cylinder held perpendicular to the incoming velocity. While the wake of the latter becomes unsteady for $\text{Re} \approx 47$ and three-dimensional for $\text{Re} \approx 180$ [11], all inclined configurations considered here are stationary and inherently three-dimensional. Therefore, the connection between the two configurations becomes loose beyond Reynolds numbers of a few tens. Nevertheless, to keep the advantage of (13) which is asymptotically correct in the creeping-flow limit, we sought an empirical Re-dependent correction capable of properly approaching the numerical results while vanishing for both $\text{Re} \rightarrow 0$ and $\theta = 90^\circ$. We sought another correction to account for the dependence of C_{\perp} with respect to the aspect ratio, requesting that this correction also vanishes for $\theta = 90^\circ$ for the aforementioned reasons. Ideally, one would like this correction to recover the proper behavior $C_{\perp} \propto \text{Re}^{-1}(\ln \chi)^{-1}$ for $\text{Re} \rightarrow 0$. However, due to the singular nature of the problem in the limit $\text{Re} \rightarrow 0$, $\chi \rightarrow \infty$ (Stokes paradox), it is known that $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re} \rightarrow 0) \propto -(\text{Re} \log \text{Re})^{-1}$ [36], which makes the ratio $C_{\perp}/C_{\perp}^{\theta=90^\circ}$ ill-defined in this limit. Consequently, we merely built the finite-length correction on the basis of present numerical data. We found this correction to be almost Re-independent, and eventually obtained the approximate expression for $C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re})$ in the form

$$C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re}) = C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re}) \frac{1 + 1.15e^{-0.45\chi} \cos \theta}{1 + 0.04\text{Re}^{1/2} \cos \theta} \sin \theta. \quad (20)$$

Figures 16(b), (d) and (f) show that the main trends of the numerical data are properly captured by the above fit. Additional improvements could easily be introduced, such as a $\sin 6\theta$ -correction to compensate for the slight overestimates noticed at intermediate inclinations ($\theta \approx 15^\circ$) as χ and Re increase. The finite-length correction suggests that the transverse force is virtually proportional to the cylinder length beyond $\chi \approx 10$. For shorter cylinders, the increase of C_{\perp} as χ decreases is qualitatively reminiscent of the $(\ln \chi)^{-1}$ low-Re behavior. However finite-length effects are much weaker in the inertial regime. For instance, Fig. 24 indicates that $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}$ is 60% larger for $\chi = 3$ than for $\chi = 10$ in the creeping-flow regime, a difference reduced to 25% in the fully inertial regime according to (20). From (19) (see also figure 3 in [35]), it may be inferred that $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re})$ only weakly decreases with the Reynolds number for $\text{Re} \gtrsim 100$. Therefore, the fit (20) indicates that $C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re})$ is almost proportional to $\text{Re}^{-1/2}$ in this range of Re, suggesting that the dominant contribution to the perpendicular force arises from boundary layer effects. Although (20) correctly reduces to $C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re}) = C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re})$ when $\theta = 90^\circ$, it is not clear up to which maximum inclination this expression provides a reliable approximation of the actual transverse force. The numerical results of [13] for $\chi = 3$ suggest that this maximum is close to 50° . Computations with higher inclinations are required to clarify this issue.

Interestingly, Sanjeevi and Padding [16] recently concluded that ‘Stokes laws’, especially the sine-squared drag law $C_d(\chi, \theta) = C_{\parallel}^{\theta=0^\circ}(\chi) + (C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi) - C_{\parallel}^{\theta=0^\circ}(\chi)) \sin^2 \theta$ which results from the combination of (10)-(11) and (12)-(13), hold for prolate spheroids (and moderately oblate spheroids) up to Reynolds numbers (based on the diameter of the equivalent sphere) of $\mathcal{O}(10^3)$. They argued that the reason for this surprising agreement is due to a partial compensation between contributions to the pressure drag arising from the regions close to the two stagnation points, in such a way that the overall pressure drag follows a sine-squared law, while the viscous contribution to the drag is almost insensitive to the inclination. Clearly this scenario does not hold for cylinders with flat ends. In the present case, wake effects are strong, with massive separation at the back of the cylinder, even for $\theta = 0^\circ$, as soon as Re exceeds some tens (see Fig. 6). These effects are deeply influenced by the body inclination (see Fig. 14) and, as Fig. 16 reveals, result in non-monotonic variations of $C_{\parallel}(\chi, \theta, \text{Re})$ with χ and Re which cannot be reduced to a simple geometric law. Therefore, it must be concluded that the scenario suggested in [16] to explain the validity of the sine-squared drag law applies only to streamlined bodies for which wake effects weakly affect the surface stress distribution.

To better understand why the perpendicular force follows the approximate law (20) throughout the parameter range explored here, it is useful to isolate the contributions to C_{\perp} provided by the various parts of the body surface, and split each of them into a pressure and a viscous stress term. Since the body ends are flat and we are focusing here on the perpendicular force, no pressure contribution arises from the ends. Figure 17 displays the variations of the remaining four nonzero terms with θ for two markedly different Reynolds numbers. The viscous contribution arising from the downstream end ($C_{\perp\mu_{down}}$) is seen to be negligibly small in all cases (note the 10^3 magnification factor in Fig. 17(d)). Hence, virtually no contribution to C_{\perp} is provided by this part of the body surface, on which wake effects concentrate in the range of θ and Re relevant here. Examining panels (a) – (c) in Fig. 17 makes it clear that the various contributions to C_{\perp} exhibit little dependence with respect to χ , apart from the viscous stress on the upstream end ($C_{\perp\mu_{up}}$) at $\text{Re} = 20$. Nevertheless, this term is one order of magnitude smaller than the total (pressure+viscous stress) contribution from the lateral surface. Consequently, the behavior of C_{\perp} is essentially dictated by the latter. Among the corresponding two terms, the viscous contribution ($C_{\perp\mu_{lat}}$) is virtually independent of χ at large Re, while some finite-length influence subsists in $C_{\perp\mu_{lat}}$. This weak dependence with respect to the aspect ratio implies that the perpendicular force increases almost linearly with the body length, given the chosen normalization factor $\rho U^2 LD/2$. The quasi-linearity of

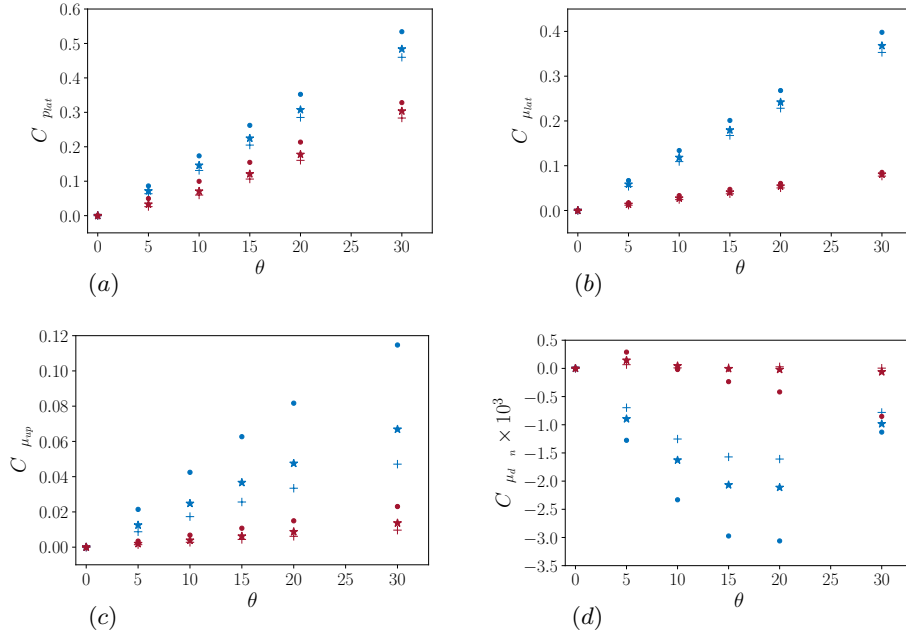


FIG. 17: Contributions to $C_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re})$ at $\text{Re} = 20$ (blue) and $\text{Re} = 300$ (red) for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. (a) pressure on the lateral surface; (b) viscous stress on the lateral surface; (c), (d) viscous stress on the upstream and downstream ends, respectively.

the two dominant contributions to C_{\perp} with respect to the inclination angle and their weak χ -dependence for $\text{Re} \gg 1$ imply that, for $\text{Re} \gtrsim 100$, the dimensional transverse force behaves approximately as

$$F_{\perp}(\chi, \theta, \text{Re}) \approx \frac{C_{\perp \theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re})}{1 + 0.04\text{Re}^{1/2} \cos \theta} \rho L D \frac{\|\mathbf{U}\| U_{\perp}}{2}, \quad (21)$$

where $U_{\perp} = \|\mathbf{U}\| \sin \theta$ is the component of the upstream velocity normal to the lateral surface and the Reynolds number Re is based on the norm of the upstream velocity. In this Reynolds number range, $C_{\perp}^{\theta=90^\circ}$ is almost constant according to (19), so that (21) indicates that the perpendicular force is approximately proportional to the power three-half of the incoming velocity, while it still varies almost linearly with θ . In contrast, the Independence Principle frequently invoked in the area of vortex-induced vibrations [10, 15] suggests that the perpendicular force on a long cylinder should only depend on the normal component U_{\perp} of the incoming flow, which would imply $F_{\perp} = \frac{1}{2} C_{\perp}^{\theta=90^\circ}(\chi \gg 1, \text{Re}_{\perp}) \rho L D \|\mathbf{U}_{\perp}\| U_{\perp}$, with $\text{Re}_{\perp} = \rho \|\mathbf{U}_{\perp}\| D / \mu$. If this were true in the present situation, a $\sin^2 \theta$ -dependence of C_{\perp} would be observed for $\text{Re}_{\perp} = \mathcal{O}(10^2)$ (*i.e.* $\text{Re} = 300$ here in practice), and the force would vary as the square of the incoming velocity. As Fig. 16(f) indicates, no quadratic dependence with respect to the inclination angle is noticed, which implies that the Independence Principle does not apply to the flow configurations under consideration. This is in line with the conclusions of [12] where it was observed at somewhat lower Reynolds numbers that this ‘principle’ only holds for inclinations larger than 70° but overestimates the force by more than 50% for $\theta \leq 30^\circ$, even for long cylinders with $\chi = 15$. In other words, this ‘principle’ is approximately valid when the upstream flow is almost normal to the cylinder lateral surface but can by no means be used to approximate the transverse force when the cylinder inclination is moderate.

C. Approximate laws for the parallel force and spanwise torque

Figure 18 shows the main contributions to $C_{\parallel}(\chi, \theta, \text{Re})$ arising from pressure and viscous stress distributions over the various parts of the cylinder surface. On both ends, the latter (not shown) are found to be more than one order of magnitude smaller than the former. Therefore, C_{\parallel} is essentially controlled by the viscous stress acting on the lateral surface and the pressure distribution on both ends. All contributions are seen to decrease for increasing aspect ratios, similar to what happens when the body is aligned with the incoming flow. This influence weakens significantly as Re increases, again in line with the observations reported for $\theta = 0^\circ$. In particular, the viscous contribution arising from the lateral surface (Fig. 18(c)) is found to be virtually independent of χ for $\text{Re} = 300$. That these features subsist for all inclinations considered here suggests that seeking an empirical expression relating $C_{\parallel}(\chi, \theta, \text{Re})$ to $C_{\parallel \theta=0^\circ}(\chi, \text{Re})$ is reasonable. Variations with θ follow different and sometimes opposite trends on the various surfaces. For instance, Fig. 18(a) indicates that $C_{\parallel p_{up}}$ decreases as the inclination increases, an effect weakening at large Reynolds number. In contrast, $C_{\parallel p_{down}}$ (Fig. 18(b)) increases gradually with θ . This is because the recirculating region at the back of the cylinder tends to

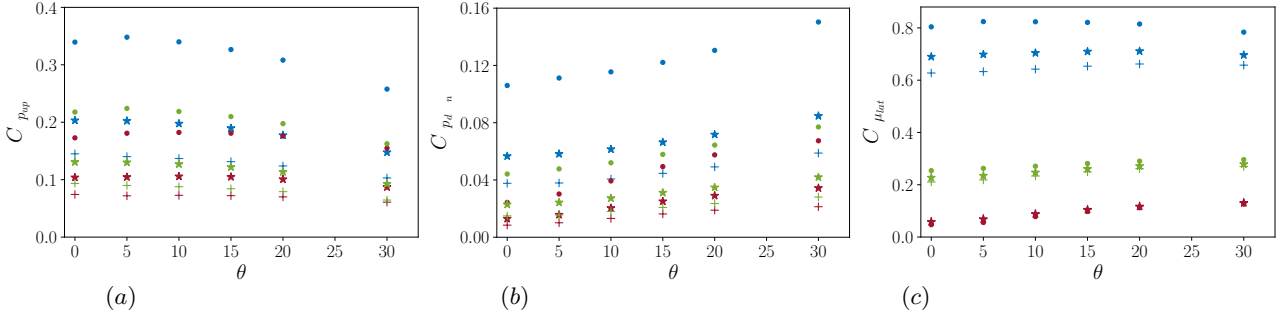


FIG. 18: Contributions to $C_{\parallel}(\chi, \theta, Re)$ at $Re = 20$ (blue), $Re = 80$ (green) and $Re = 300$ (red) for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. (a) – (b) pressure on the upstream and downstream ends, respectively; (c) viscous stress on the lateral surface.

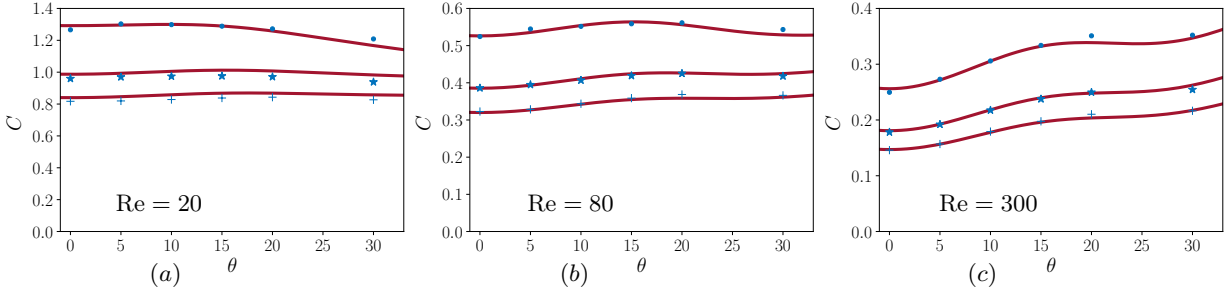


FIG. 19: Parallel force coefficient $C_{\parallel}(\chi, \theta, Re)$ vs. θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. Solid line: empirical fit (22).

shrink when θ increases, as noticed in Sec. V A. A significant increase of $C_{\parallel, \mu_{lat}}$ is also noticed at $Re = 300$ (Fig. 18(c)), but this trend weakens as Re decreases and is no longer present at $Re = 20$.

To approximate the variations of C_{\parallel} with χ , θ and Re , we started from the fits (6)-(8) established for $\theta = 0^\circ$ in Sec. III B. We took into account the constraint that C_{\parallel} cannot depend on the sign of θ and must change sign for $\theta = 90^\circ$, although this configuration is well beyond the maximum inclination considered in the simulations. This led us to assume that the leading-order angular dependence of the correction to the ‘Stokes law’ is proportional to $\sin^2 \theta \cos \theta$. Then, we first considered the case $\chi = 7$ for which finite-length effects are the weakest, and started to fit the dependence with respect to Re for $\theta = 30^\circ$, the maximum inclination. The behavior of C_{\parallel} at median inclinations suggests that the angular dependence also involves a secondary contribution that may be approached by a term proportional to $\sin^2 6\theta \cos \theta$. Last, we considered finite-length effects, starting with $\chi = 3$ for which they are most severe. All empirical pre-factors were constrained to vanish for $Re \rightarrow 0$, so that C_{\parallel} reduces to its low- Re form in this limit. The whole process was carried out iteratively, to optimize the pre-factors and exponents for the three aspect ratios over the whole range of Re and θ . Keeping in mind that the drag coefficient $C_d(\chi, Re)$ determined in Sec. III B by summing (6)-(8) has to be multiplied by a factor $\frac{\pi}{4}\chi^{-1}$ to be used in the prediction of C_{\parallel} , the final fit takes the form

$$C_{\parallel}(\chi, \theta, Re) \approx \frac{\pi}{4}\chi^{-1}C_d(\chi, Re) \left\{ 1 + [(0.7 - 6.3\chi^{-2})(1 - e^{-0.15Re}) + 0.01Re^{0.95}] \sin^2 \theta + 2 \times 10^{-3} Re^{0.8} \sin^2 6\theta \right\} \cos \theta. \quad (22)$$

As Fig. 19 shows, this fit provides a correct estimate of C_{\parallel} throughout the range of parameters explored in the present investigation. Expression (22) highlights the fact that inertial effects act to increase C_{\parallel} and counteract the $\cos \theta$ -decrease associated with viscous effects, and even overtake them for high enough Re (for large χ and $Re \gtrsim 10$, the dominant contribution to the term within curly brackets is $1 + (0.7 + 0.01Re^{0.95}) \sin^2 \theta$). Obviously, the above fit is not expected to be valid for Reynolds numbers significantly larger than the upper bound considered in the simulations, as it predicts a diverging drag in the limit $Re \rightarrow \infty$. Similarly, (22) is not expected to hold for larger inclinations: in [13] it was observed that, for $\chi = 3$ and $Re = 250$, C_{\parallel} sharply decreases in the range $30^\circ < \theta < 45^\circ$, a trend that the above fit is clearly unable to reproduce.

Figure 20 shows the variations of the torque coefficient as a function of θ . Similar to the low-to-moderate Re regime, the torque is always negative, tending to orient the cylinder axis perpendicular to the upstream flow. The torque coefficient exhibits a quasilinear increase with the inclination angle for $\chi = 5$ and 7 . This may be seen as a natural extension of the $\sin 2\theta$ -variation characterizing the C_t -variations at low Re . $|C_t|$ is also found to decrease for increasing χ at $Re = 20$ and $Re = 80$. The behavior observed at $Re = 300$ is more complex, especially in the case of the shortest cylinder for which the angular dependence is strongly nonlinear for $\theta \lesssim 15^\circ$.

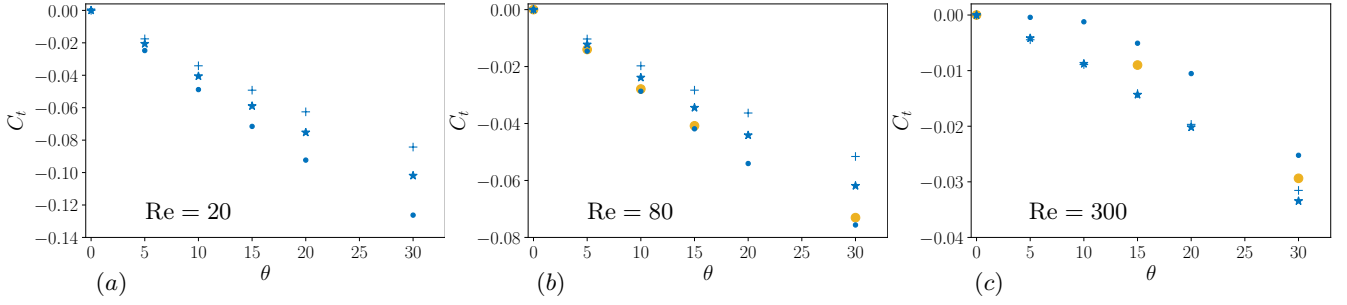


FIG. 20: Torque coefficient vs. θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$ $\chi = 7$. The yellow bullets in panels (b) and (c) refer to the results of [13] for $\chi = 3$ at $\text{Re} = 75$ and 250 , respectively.

Moreover, while the corresponding $|C_t|$ is larger than those of the other two cylinders at $\text{Re} = 20$ and $\text{Re} = 80$, the situation is reversed at $\text{Re} = 300$. Some additional insight into these variations may again be obtained by splitting the torque into pressure and viscous contributions provided by each part of the cylinder surface. The main contributions resulting from this decomposition are displayed in Fig. 21. The two dominant terms are seen to result from the pressure distribution on the lateral surface ($C_{t_{p_{lat}}}$) and the viscous stress on the upstream end ($C_{t_{\mu_{up}}}$). Both terms decrease in magnitude with increasing χ and Re , keeping a negative sign in all cases. The third and fourth contributors, $C_{t_{p_{up}}}$ and $C_{t_{\mu_{lat}}}$, result from the pressure and viscous stress distributions on the same surfaces. The contributions of the downstream end (not shown) are one order of magnitude smaller than the dominant terms in all cases. In contrast to its viscous counterpart ($C_{t_{\mu_{up}}}$), $C_{t_{p_{up}}}$ is seen to keep a positive sign in all cases. The three contributions $C_{t_{p_{lat}}}$, $C_{t_{p_{up}}}$ and $C_{t_{\mu_{up}}}$ vary almost linearly with θ whatever χ and Re . The viscous contribution associated with the lateral surface, $C_{t_{\mu_{lat}}}$ (Fig. 21(d)), reveals a more complex behavior. First, its sign changes with χ and Re . It stays positive whatever θ for the shortest cylinder, increasing in magnitude as Re increases. Conversely, it is negative for the longest two cylinders at $\text{Re} = 20$, gradually decreasing until changing sign at all inclinations for $\text{Re} = 300$. Second, variations of $C_{t_{\mu_{lat}}}$ with θ become increasingly nonlinear as χ decreases and/or Re increases. This complex behavior is responsible for the markedly nonlinear variations of C_t with θ noticed above for the shortest cylinder at $\text{Re} = 300$. The open separation process discussed in Sec. V A is responsible for these features. Indeed, the dominant local viscous contribution to the spanwise torque provided by the lateral surface is, in dimensional form, $-\mu \frac{D}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y}{\|\mathbf{r}\|} (\mathbf{n} \cdot \nabla) u_{\parallel}$, where u_{\parallel} is the fluid velocity component parallel to this surface (along the x -direction), \mathbf{n} is the unit normal directed into the fluid and \mathbf{r} is the local position with respect to the cylinder geometrical center. As far as the fluid does not recirculate, this term is positive on the lower part of the surface ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y < 0$) and negative on the upper part ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y > 0$). However, when separation takes place, u_{\parallel} is negative in the corresponding region of the upper part, which then provides a positive viscous contribution, making $C_{t_{\mu_{lat}}}$ positive if the recirculation is strong enough. The larger the area percentage of the lateral surface corresponding to the separated region, the larger the positive value of $C_{t_{\mu_{lat}}}$.

Following a fitting procedure similar to that described for C_{\parallel} , we approached the behaviors observed in Fig. 20 with the empirical expression

$$C_t(\chi, \theta, \text{Re}) \approx \chi^{-0.47} \left\{ -0.69 \text{Re}^{-0.35 - b_1(\text{Re}/\chi)^{3.1}} \sin 2\theta + 1 \times 10^{-4} \text{Re}^{0.8 + b_2(\text{Re}/\chi)^{3.1}} \sin 6\theta \right\}, \quad (23)$$

with $b_1 = 7 \times 10^{-8}$ and $b_2 = 5 \times 10^{-8}$. As Fig. 22 shows, the above fit provides a correct estimate of C_t throughout the range of parameters explored in the present investigation. For large enough aspect ratios, the dominant contribution to C_t is still proportional to $\sin 2\theta$, similar to the low- Re -regime, and its magnitude varies as $\chi^{-0.47} \text{Re}^{-0.35}$. The torque coefficient is seen to be approximately proportional to $\chi^{-1/2}$ whatever Re , which suggests that the dimensional torque behaves roughly like $L^{3/2}$ for long enough cylinders. Finite-length high- Re effects associated with the open separation are translated into the above fit through the slight but sharp $(\text{Re}/\chi)^{3.1}$ -increase of the Reynolds number exponent. Similar to the case of C_{\parallel} , the above fit is not expected to be valid for Reynolds numbers significantly larger than the upper bound considered in the simulations. Moreover, although (23) respects the constraint that the torque changes sign for $\theta = 90^\circ$, the results of [13] for a cylinder with $\chi = 3$ indicate that the behavior of C_t changes significantly for $\theta \gtrsim 45^\circ$, suggesting that the present fit is appropriate only below this critical inclination.

VI. SUMMARY AND CONCLUDING REMARKS

With the practical objective of providing approximate laws for predicting the translation-induced drag, lift and torque acting on long cylindrical rods and fibers, we employed fully-resolved simulations to investigate the flow around a finite-length circular cylinder held fixed in a uniform stream making some angle with the body

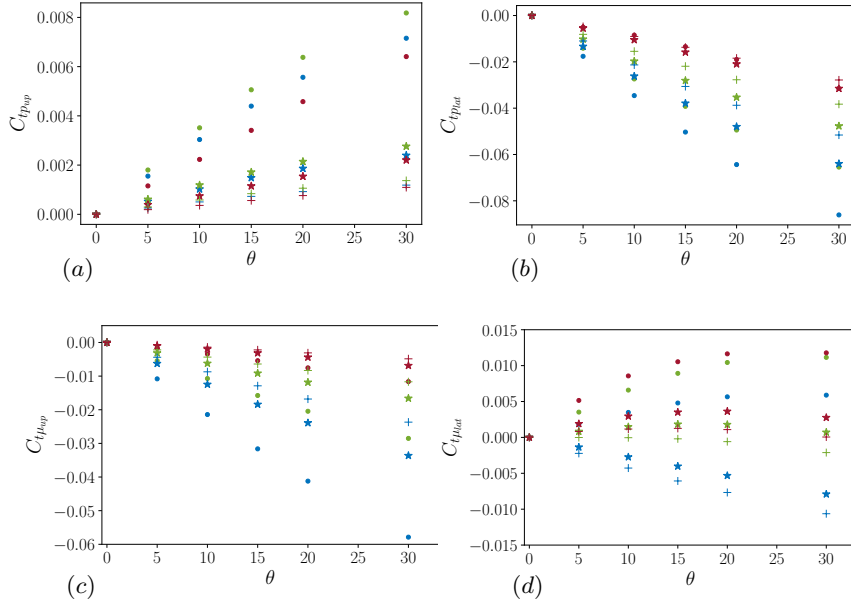


FIG. 21: Contributions to $C_t(\chi, \theta, \text{Re})$ at $\text{Re} = 20$ (blue), $\text{Re} = 80$ (green) and $\text{Re} = 300$ (red) for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. (a) – (b) pressure on the upstream end and the lateral surface, respectively; (c) – (d) viscous stress on the upstream end and the lateral surface, respectively.

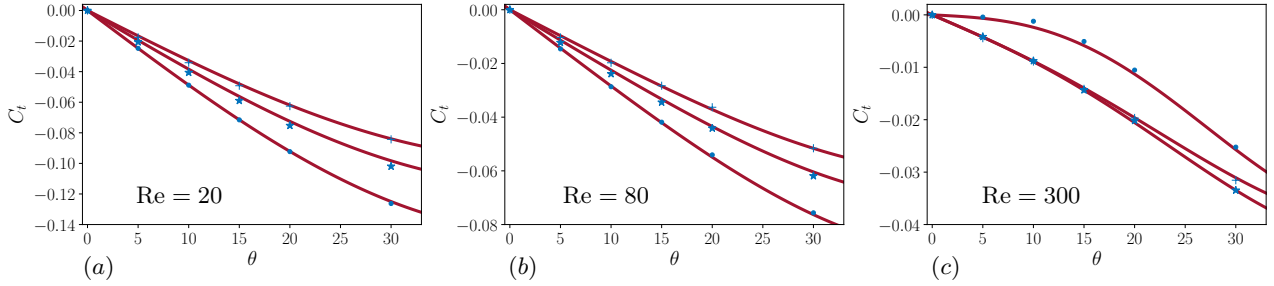


FIG. 22: Torque coefficient $C_t(\chi, \theta, \text{Re})$ vs. θ for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. Solid line: empirical fit (23).

axis.

We first focused on the specific case where the cylinder is aligned with the incoming flow. Considering the Stokes regime and the weakly inertial regime corresponding to $\text{Re} \lesssim 1$, we combined numerical results with available predictions from the slender-body theory (which we slightly improved by computing the next-order term in the expansion with respect to the small parameter $1/\ln(2\chi)$) to build the approximate drag laws (1) and (5). The former is valid down to $\chi \approx 1.5$, while the inertial corrections contained in the latter allow an accurate estimate of the drag up to $\text{Re} = \mathcal{O}(1)$, and even up to $\text{Re} = \mathcal{O}(10)$ for $\chi \gtrsim 20$. For larger Reynolds numbers (up to $\text{Re} = 400$), the flow structure becomes more complex, although it remains stationary and axisymmetric. Beyond a χ -dependent critical Reynolds number of the order of 200, a second recirculating region emerges along the upstream part of the lateral surface. Being associated with local negative shear stresses, this lateral eddy acts to reduce the friction drag, which may even become negative if Re is large enough and the cylinder is short enough. We used the numerical data to build approximate fits for this friction drag and for the pressure drag contribution of the upstream and downstream ends. With this procedure, we obtained the empirical drag law (9) which approximates the drag well for $\chi \gtrsim 2$ in the range $20 \leq \text{Re} \leq 400$ and properly matches (5) for $\text{Re} = \mathcal{O}(1)$. The friction drag still represents a substantial part of the total drag at Reynolds numbers of several hundreds if the body aspect ratio is large enough (45% at $\text{Re} = 400$ for a cylinder with $\chi = 10$).

In the next step, we examined the case of moderately inclined cylinders ($\theta \leq 30^\circ$) in the low-to-moderate Reynolds number regime ($\text{Re} \leq 5$). For Reynolds numbers less than unity and aspect ratios up to 10, we observed that the force component parallel to the cylinder axis closely follows the $\cos \theta$ -variation predicted under creeping-flow conditions. The agreement deteriorates as the length-based Reynolds number χRe exceeds values of $\mathcal{O}(10)$. Under more inertial conditions, the $\cos \theta$ -law under-predicts the actual parallel force, the difference increasing with both χRe and θ . The force component perpendicular to the cylinder axis was found to closely follow the $\sin \theta$ -variation typical of creeping-flow conditions up to $\text{Re} = 5$, irrespective of χ . However, the corresponding pre-factor deviates from the creeping-flow prediction as soon as $\chi \text{Re} \gtrsim 0.5$, beyond which inertial effects become significant. Accurate predictions are obtained up to $\chi \text{Re} \approx 10$ by estimating the pre-factor of the

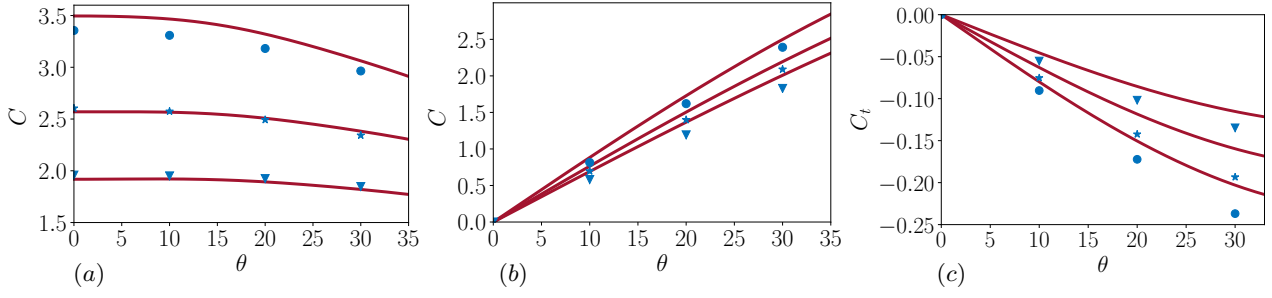


FIG. 23: Extrapolated predictions at $\text{Re} = 5$ of fits derived in the fully inertial regime for \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, $+$: $\chi = 7$. (a) C_{\parallel} and fit (22); (b) C_{\perp} and fit (20); (c) C_t and fit (23).

$\sin \theta$ -law through the semi-empirical formula (C4) which provides a finite-Reynolds-number approximation of $F_{\perp}^{\theta=90^\circ}$. Throughout the low-to-moderate Reynolds number range, the inertial torque follows the $\sin 2\theta$ -variation predicted by the asymptotic theory of Khayat and Cox [4] in the limit $\chi \text{Re} \ll 1$. However the magnitude of the torque is correctly predicted by this theory only up to $\text{Re} = \mathcal{O}(1)$ and provided $\text{Re}/\chi^2 \lesssim 0.01$. To obtain a correct estimate of the torque over a broader range of conditions, we derived the semiempirical law (18) which correctly reduces to the theoretical prediction in the limit $\chi \text{Re} \ll 1, \chi \gg 1$ and closely approaches numerical data for cylinders with $\chi \geq 5$ up to $\text{Re} = 5$.

Last we considered the three-dimensional flow past moderately inclined cylinders with aspect ratios in the range 3 – 7 for $20 \leq \text{Re} \leq 300$. For $\theta \leq 30^\circ$, the flow remains stationary irrespective of the inclination and preserves a symmetry with respect to the plane containing the body axis and the incoming velocity. For sufficiently low inclinations and Reynolds numbers, the flow separates only at the back of the body, the recirculating region looking like an open toroid. In contrast, beyond a critical inclination decreasing as Re increases, an open separated region emerges on the ‘extrados’ of the lateral surface, near its ‘leading edge’. In such configurations, the flow past the cylinder looks massively separated in between the two free streamlines emanating from its ‘trailing’ and ‘leading’ edges.

We used numerical data collected in this fully inertial regime to obtain approximate laws for the loads acting on the cylinder. Similar to the low-Re behavior, the perpendicular force obeys essentially a $\sin \theta$ -variation with a mild dependence with respect to the aspect ratio. We found that the corresponding force coefficient C_{\perp} may be related to the drag coefficient of a cylinder held perpendicular to the incoming flow through the empirical law (20) which involves two simple independent corrections, one proportional to $\text{Re}^{-1/2}$ accounting for inertial effects, the other for finite-length effects. In contrast, variations of the parallel force do not follow the $\cos \theta$ -law prevailing in the low-Re regime. Instead, the force coefficient C_{\parallel} barely varies with θ in the moderate-Re regime and even increases with the inclination at large Reynolds number. A fitting procedure with respect to the three control parameters allowed us to mimic the influence of inertial and finite-length effects on C_{\parallel} through the empirical law (22) which reproduces all observed trends well. Variations of the spanwise torque at moderate Reynolds number are qualitatively similar to those observed for $\text{Re} \leq 5$. However strong finite-length effects manifest themselves at high Reynolds number, in connection with the separation process affecting the upstream part of the lateral surface in this regime. A fitting approach similar to that employed for C_{\parallel} yielded the empirical law (23) which correctly approximates C_t throughout the explored range of χ and θ in the fully inertial regime. For application purposes, it is of course of interest to know how robust these fits determined from data in the range $20 \leq \text{Re} \leq 300$ are when the Reynolds number is decreased to the upper limit of the low-to-moderate Re regime considered in Sec. IV. The results of this test are summarized in Fig. 23. It turns out that the empirical formula established in the fully inertial regime still perform quite well for $\text{Re} = 5$. Predictions depart from numerical data by less than 5% for C_{\parallel} , 10% for C_{\perp} and 15% for C_t . Therefore, the semi-empirical predictions derived in Sec. IV combined with the fits established in Sec. V offer a complete and almost smooth description of load variations from the creeping-flow regime up to $\text{Re} = 300$.

Most computations only considered aspect ratios below 10 or even 7 for $\text{Re} \geq 20$, owing to the rapid increase of computational costs with χ . However, finite-length effects were found to decrease monotonically and sharply as χ increases, making us confident that the various empirical laws derived in the course of this study remain valid for cylindrical particles with larger aspect ratios, and therefore apply to long fibers. Obviously this does not mean that the load coefficients become independent of χ for $\chi \gg 1$, but simply that their asymptotic dependence with respect to χ in the limit of large aspect ratios is already captured by considering $\mathcal{O}(10)$ -aspect ratios as we did. The situation is less clear regarding their range of validity with respect to the inclination angle. All of them were calibrated in the range $|\theta| \leq 30^\circ$ and satisfy the required geometrical constraints for $|\theta| = 90^\circ$ and the associated symmetry conditions. Nevertheless, as soon as the Reynolds number exceeds a few tens, the dynamics of the flow past a cylinder in the configuration $\theta = 90^\circ$ drastically differs from that past the same cylinder for $\theta = 0^\circ$. Hence, physical features that are not present in the low-to-moderate inclination range considered here take place in the near-body flow when the inclination exceeds 45° or so, which is likely to make the empirical laws proposed here invalid for such large inclinations.

The present investigation leaves several important configurations and parameter ranges unexplored. First, for Reynolds numbers similar to those considered in Secs. IV and V, the above discussion calls for a specific study focused on large inclinations, say $45^\circ \lesssim |\theta| \leq 90^\circ$, for which the flow past the cylinder is expected to be massively separated and most of the time unsteady. Another series of questions arises when the cylinder is allowed to rotate about an axis perpendicular to its symmetry axis and passing through its geometrical center, as rodlike particles and fibers customarily do. The torque on a slender rotating cylinder was predicted in the creeping flow limit in [1, 2] but no theoretical attempt to derive inertial corrections in this configuration has been reported so far. This is even more true for the general situation in which the cylinder undergoes both a translation and a rotation. In such a case, inertial effects couple the two types of motion, yielding specific contributions to the loads, which are for instance responsible for the well-known Magnus effect on a spinning sphere. To the best of our knowledge, such couplings have not been considered for slender cylinders. We are currently investigating numerically the configuration in which the cylinder undergoes an imposed rotation, and plan to apply the same methodology to the combined translation+rotation case in the near future.

ACKNOWLEDGMENTS

M. K.'s fellowship was provided by IFP Energies Nouvelles whose financial support is greatly appreciated. The authors thank Annaïg Pedrono for her continuous support with the use of the JADIM code. Part of the computations were carried out on the national supercomputers operated by the GENCI organization under allocation A0072B10978.

Appendix A: Specific numerical validations

As mentioned in Sec. II, the JADIM code was extensively used in the past to compute flows past axisymmetric bodies. In particular, transitional flows past disks and short cylinders were considered in [18–20]. Nevertheless, we performed additional validations relevant to the present physical configuration by considering the flow past an inclined cylinder of aspect ratio $\chi = 3$ for different Reynolds numbers and inclination angles.

	Number of cells across the boundary layer	C_d	Error %
$\text{Re} = 100, \theta = 5^\circ$	5	0.478	0.62
	8	0.479	0.4
	10	0.481	-
$\text{Re} = 100, \theta = 15^\circ$	5	0.546	2.2
	8	0.534	0.37
	10	0.532	-
$\text{Re} = 200, \theta = 15^\circ$	5	0.416	1.4
	8	0.411	0.2
	10	0.410	-

TABLE I: Drag coefficient obtained with three different grids (with 5, 8 and 10 cells across the boundary layer, respectively), and three different flow configurations. The relative error is based on the most refined grid.

We first performed runs with an increasing number of cells across the boundary layer, the thickness of which is estimated as $D\text{Re}^{-1/2}$. Table I shows the effect of the grid refinement on the drag coefficient (here defined as the drag force normalized by $LD\rho U^2/2$) for three different configurations. Clearly, eight cells across the boundary layer suffice to properly capture viscous effects, since the relative difference with the drag obtained on the most refined grid is less than 1% in each configuration.

Re	θ	C_d		$E(C_d)\%$
		[13]	Present results	
100	5°	0.472	0.479	1.4
	10°	0.499	0.501	0.4
	15°	0.536	0.534	0.3
	30°	0.693	0.680	1.4
200	10°	0.350	0.345	1.4
	15°	0.405	0.411	1.5

TABLE II: Comparison of the drag coefficient obtained with the present numerical methodology with results of [13] for $5^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ and two moderate Reynolds numbers. $E(C_d)$ is the relative difference between the drag coefficients provided by the two sources.

Then we checked present results obtained with eight cells across the boundary layer against those of [13] based on the PELIGRIFF code [37]. Table II shows how the two sets of the results compare for six different flow configurations. The drag coefficients are seen to differ by less than 1.5% in all cases.

Appendix B: Higher-order zero-Reynolds-number slender-body prediction for the drag on a finite-length cylinder aligned with the flow or perpendicular to it

The hydrodynamic force experienced by a slender body immersed in a nonuniform flow was derived independently by Batchelor [1], Cox [2] and Keller and Rubinow [25] in the form of an expansion with respect to the small parameter $1/\ln(2\chi)$ for $\chi \gg 1$. References [1] and [25] provide an expansion up to order 3 in this small parameter. However, the logarithmic dependence of the force with respect to χ makes higher-order contributions significant as soon as χ becomes of $\mathcal{O}(10)$ or less. This is why a higher-order prediction is desirable to obtain a more accurate evaluation of the force on moderately-long cylinders. In this appendix, restricting ourselves to the case where the cylinder is aligned with the incoming flow, we provide the expression for the drag valid up to order 4, based on the expansion carried out in [25].

The total force experienced by a slender fiber of length L immersed in a viscous flow may be expressed in the form

$$\mathbf{F} = -8\pi\mu L \int_0^1 \mathbf{f}(s) ds, \quad (\text{B1})$$

where $\mathbf{f}(s)$ is the density of the Stokeslet distribution along the body centerline and s denotes the arc length. The density \mathbf{f} is obtained through a matched asymptotic procedure, the details of which may be found in [25]. If the body is a circular cylinder aligned with the flow direction, one has $\mathbf{f}(s) = f_x(x)\mathbf{e}_x$ with

$$f_x(x) = -\frac{1}{2\ln(2\chi)} \left(\frac{U_x}{2} + f_x(x) (\ln(4x(1-x)) - 1) + \int_{-x}^{1-x} \frac{f_x(x+t) - f_x(x)}{|t|} dt \right), \quad (\text{B2})$$

where $U_x = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_x$. An approximate solution of (B2) may be obtained by successive approximations. Setting $f_x = 0$ in the right-hand side, the first-order approximation is found to be $f_x^{(1)} = -U_x/(4\ln(2\chi))$. The iterative solution was obtained in [25] up to order 3 in the form

$$f_x^{(3)}(x) = -\frac{U_x}{4\ln(2\chi)} \left(1 - \frac{1}{2\ln(2\chi)} (\ln(4x(1-x)) - 1) + \frac{1}{(2\ln(2\chi))^2} (\ln(4x(1-x)) - 1)^2 + \frac{1}{(2\ln(2\chi))^2} \int_{-x}^{1-x} \frac{\ln((x+t)(1-x-t)) - \ln(x(1-x))}{|t|} dt \right). \quad (\text{B3})$$

Integrating the penultimate term in (B3), we obtain

$$F_x^{(3)} = -8\pi\mu L \int_0^1 f_x^{(3)}(x) dx = 2\pi\mu L U_x \left(\frac{a_x^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a_x^{(2)}}{(\ln(2\chi))^2} + \frac{a_x^{(3)}}{(\ln(2\chi))^3} \right), \quad (\text{B4})$$

with $a_x^{(1)} = 1$, $a_x^{(2)} = 3/2 - \ln 2 \approx 0.80685$, and $a_x^{(3)} = 13/4 - \pi^2/12 + \ln 2(\ln 2 - 3) \approx 0.82854$. This result agrees with those of [1] and [25]. At next order, the force density may be obtained by inserting (B3) in the right-hand side of (B2), yielding

$$f_x^{(4)}(x) = -\frac{U_x}{4\ln(2\chi)} \left(1 - \frac{1}{2\ln(2\chi)} (\ln(4x(1-x)) - 1) + \frac{1}{(2\ln(2\chi))^2} (\ln(4x(1-x)) - 1)^2 - \frac{1}{(2\ln(2\chi))^3} \left[(\ln(4x(1-x)) - 1)^3 + (\ln(4x(1-x)) - 1) \int_{-x}^{1-x} \frac{\ln((x+t)(1-x-t)) - \ln(x(1-x))}{|t|} dt \right] - \frac{1}{(2\ln(2\chi))^3} \int_{-x}^{1-x} \frac{f_x^{(3)}(x+t) - f_x^{(3)}(x)}{|t|} dt \right). \quad (\text{B5})$$

The drag acting on the body is eventually obtained by making use of the previous expression in (B1) and integrating along the body centerline. Since the last term in (B5) does not contribute to the force [25], one is left with

$$F_x^{(4)} = F_x^{(3)} + 2\pi\mu L U_x \left(\frac{a_x^{(4)}}{(\ln(2\chi))^4} \right), \quad (\text{B6})$$

with $a_x^{(4)} = [-10\zeta(3) + 79 + \pi^2(\ln 4 - 3) - \ln 4(39 + (\ln 4)^2 - 9\ln 4)] / 8 \approx 1.45243$, ζ denoting the Riemann zeta function. The main difficulty in the integration required to obtain $a^{(4)}$ results from the first integral in the right-hand side of (B5). A formal computation using MathematicaTM indicates that this term provides a contribution of $2\zeta(3)$.

Appendix C: Drag force on a cylinder held perpendicular to the flow: Slender-body approximation and semiempirical laws at zero and low-but-finite Reynolds number

Due to the linearity of the Stokes equation, the force acting on an arbitrarily inclined cylinder in the low-Re regime may be obtained by suitably combining linearly the drag forces corresponding to the aligned ($\theta = 0^\circ$) and perpendicular ($\theta = 90^\circ$) configurations. This is why an accurate estimate of the zero-Re drag force on a finite-length cylinder held perpendicular to the incoming flow is desirable. To our surprise, such an estimate does not seem to be available in the literature. Clift et al. [24] proposed an empirical relationship accurate for moderate aspect ratios but did not match it with the prediction of the slender-body theory in the limit of large aspect ratios. In this appendix, we first use the methodology employed in appendix B to establish the 4th-order slender-body approximation of the corresponding drag force at $\text{Re} = 0$. Then we modify the corresponding expression in an *ad hoc* manner to extend its validity to short cylinders, before incorporating the finite-Re correction derived in [4].

Duplicating the technique used in appendix B, the density of the Stokeslet distribution f_y required to obtain the force F_y on the cylinder is obtained by replacing $\ln(4x(1-x)) - 1$ everywhere with $\ln(4x(1-x)) + 1$, and U_x with $2U_y$ in (B5) [25]. Then the total force is found to be

$$F_y^{(4)} = -8\pi\mu L \int_0^1 f_y^{(4)}(x)dx = 4\pi\mu LU_y \left(\frac{a_y^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a_y^{(2)}}{(\ln(2\chi))^2} + \frac{a_y^{(3)}}{(\ln(2\chi))^3} + \frac{a_y^{(4)}}{(\ln(2\chi))^4} \right), \quad (\text{C1})$$

with $a_y^{(1)} = 1$, $a_y^{(2)} = 1/2 - \ln 2 \approx -0.19315$, $a_y^{(3)} = 5/4 - \pi^2/12 + \ln 2(\ln 2 - 1) \approx 0.21484$ and $a_y^{(4)} = [-10\zeta(3) + 29 + \pi^2(\ln 4 - 1) - \ln 4(15 + (\ln 4)^2 - 3\ln 4)] / 8 \approx 0.38735$.

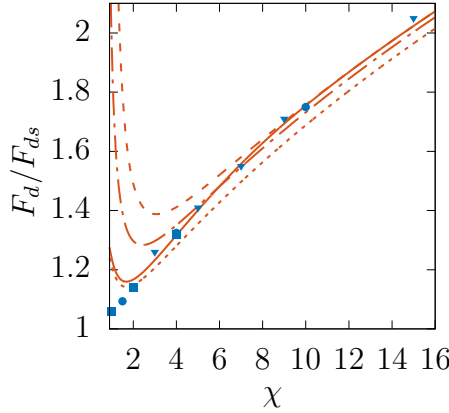


FIG. 24: Drag on a finite-length cylinder held perpendicular to the flow direction, normalized by the drag F_{ds} of a sphere of same volume. Dotted, dash-dotted and dashed lines: slender-body approximation (C1) truncated at 2nd, 3rd and 4th order, respectively; solid line: semiempirical formula (C2); \bullet : numerical results of [38]; \blacksquare : experimental results of [27]; \blacktriangledown : experimental results of [39].

Figure 24 displays the corresponding successive predictions and compares them with experimental and numerical data. The 3rd-order approximation provides a fairly good agreement for small-to-moderate aspect ratios. However, neither the 2nd-order nor the 3rd-order approximation properly matches available data in the limit of high aspect ratios. The 4th-order approximation provides a better prediction at high χ but quickly diverges as χ becomes less than ≈ 4 . Based on these observations, we empirically modify (C1) by weighting the third- and fourth-order terms with a pre-factor that quickly varies from 1 for moderate-to-large χ to 0 for $\chi \rightarrow 1/2$, in such a way that the behavior of the 3rd-order expansion is recovered for moderate aspect ratios. The corresponding modified drag law reads

$$F_y^{(4)} = -8\pi\mu L \int_0^1 f_y^{(4)}(x)dx = 4\pi\mu LU_y \left(\frac{a_y^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a_y^{(2)}}{(\ln(2\chi))^2} + \left(1 - e^{-c_1\chi^{c_2}}\right) \left(\frac{a_y^{(3)}}{(\ln(2\chi))^3} + \frac{a_y^{(4)}}{(\ln(2\chi))^4} \right) \right), \quad (\text{C2})$$

with $c_1 = 0.01$ and $c_2 = 2.5$. As Fig. 24 shows, (C2) properly approximates available experimental and numerical results down to $\chi \approx 2$.

A second step is to capture the drag increase due to finite-Re effects. Khayat and Cox [4] computed such effects up to second order with respect to $1/\ln(2\chi)$ and obtained (see also [29] and [30])

$$F_y^{\chi \text{Re}=\mathcal{O}(1)} \approx 4\pi\mu LU \left(\frac{a_y^{(1)}}{\ln \chi} + \frac{a_y^{(2)} - \ln 2 + f_\perp}{(\ln \chi)^2} \right), \quad (\text{C3})$$

with

$$f_\perp = E_1\left(\frac{\chi \text{Re}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\chi \text{Re}}{2}\right) - 2 \left(\frac{e^{-\chi \text{Re}/2} - 1}{\chi \text{Re}} \right) + \gamma - 1,$$

so that $f_\perp \rightarrow \frac{1}{4}\chi \text{Re}$ when $\chi \text{Re} \rightarrow 0$. As in the $\theta = 0^\circ$ -case, the main shortcoming of (C3) is the second-order truncation with respect to $1/\ln(2\chi)$. To partly alleviate this limitation, we take advantage of the higher-order corrections present in (C2) and merely add the second-order finite-Re correction while leaving higher-order terms unchanged. This yields the empirical composite approximation

$$F_y^{\chi \text{Re}=\mathcal{O}(1)} \approx 4\pi\mu LU_y \left(\frac{a_y^{(1)}}{\ln(2\chi)} + \frac{a_y^{(2)} + f_\perp}{(\ln(2\chi))^2} + \left(1 - e^{c_1\chi^{c_2}}\right) \left(\frac{a_y^{(3)}}{(\ln(2\chi))^3} + \frac{a_y^{(4)}}{(\ln(2\chi))^4} \right) \right). \quad (\text{C4})$$

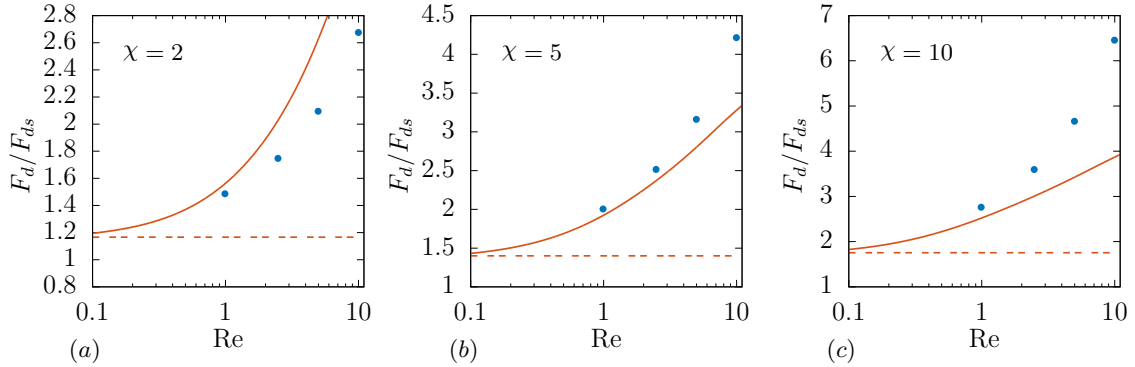


FIG. 25: Influence of inertial effects on the drag of finite-length cylinders held perpendicular to the upstream flow. The drag is normalized by that of a sphere of same volume. Solid line: semiempirical prediction (C4); dashed line: prediction (C2); •: numerical results of [12].

As Fig. 25 indicates, predictions from (C4) almost match the numerical results of [12] for $\text{Re} = 1$. Not surprisingly, they increasingly deviate from these results as Re increases beyond this point, over- (under-) predicting the actual drag for $\chi = 2$ ($\chi = 5, 10$).

-
- [1] G. K. Batchelor. Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 44: 419–440, 1970.
 - [2] R. G. Cox. The motion of long slender bodies in a viscous fluid. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.*, 44:791–810, 1970.
 - [3] J. P. K. Tillett. Axial and transverse Stokes flow past slender axisymmetric bodies. *J. Fluid Mech.*, 44:401–417, 1970.
 - [4] R. E. Khayat and R. G. Cox. Inertia effects on the motion of long slender bodies. *J. Fluid Mech.*, 209:435–462, 1989.
 - [5] M. B. Mackaplow and E. S. B. Shaqfeh. A numerical study of the sedimentation of fibre suspensions. *J. Fluid Mech.*, 376:149–182, 1998.
 - [6] J. E. Butler and E. S. G. Shaqfeh. Dynamic simulations of the inhomogeneous sedimentation of rigid fibres. *J. Fluid Mech.*, 468:205–237, 2002.
 - [7] M. Shin and D. L. Koch. Rotational and translational dispersion of fibres in isotropic turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 540:143–173, 2005.
 - [8] C. Marchioli, M. Fantoni, and A. Soldati. Orientation, distribution, and deposition of elongated, inertial fibers in turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 22:033301, 2010.
 - [9] G. A. Voth and A. Soldati. Anisotropic particles in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 49:249–276, 2017.
 - [10] S. E. Ramberg. The effects of yaw and finite length upon the vortex wakes of stationary and vibrating circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 128:81–107, 1983.

- [11] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28:477–539, 1996.
- [12] A. Vakil and S. I. Green. Drag and lift coefficients of inclined finite circular cylinders at moderate Reynolds numbers. *Comput. Fluids*, 38:1771–1781, 2009.
- [13] J. L. Pierson, F. Auguste, A. Hammouti, and A. Wachs. Inertial flow past a finite-length axisymmetric cylinder of aspect ratio 3: Effect of the yaw angle. *Phys. Rev. Fluids*, 4:044802, 2019.
- [14] W. R. Sears. The boundary layer of yawed cylinders. *J. Aeronaut. Sci.*, 15:41–52, 1948.
- [15] M. M. Zdravkovich. *Flow Around Circular Cylinders: Vol. 2: Applications*. Oxford Univ. Press, 1997.
- [16] S. K. P. Sanjeevi and J. T. Padding. On the orientational dependence of drag experienced by spheroids. *J. Fluid Mech.*, 820:R1, 2017.
- [17] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 284:97–135, 1995.
- [18] D. Fabre, F. Auguste, and J. Magnaudet. Bifurcations and symmetry breaking in the wake of axisymmetric bodies. *Phys. Fluids*, 20:051702, 2008.
- [19] F. Auguste, D. Fabre, and J. Magnaudet. Bifurcations in the wake of a thick circular disk. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 24:305–313, 2010.
- [20] F. Auguste, J. Magnaudet, and D. Fabre. Falling styles of disks. *J. Fluid Mech.*, 719:388–405, 2013.
- [21] F. Auguste and J. Magnaudet. Path oscillations and enhanced drag of light rising spheres. *J. Fluid Mech.*, 841:228–266, 2018.
- [22] I. Calmet and J. Magnaudet. Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 9:438–455, 1997.
- [23] F. Auguste. *Instabilités de sillage et trajectoires d’un corps solide cylindrique immergé dans un fluide visqueux*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France (available online at <http://thesesups.ups-tlse.fr/1186/>), 2010.
- [24] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, 1978.
- [25] J. B. Keller and S. I. Rubinow. Slender-body theory for slow viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 75:705–714, 1976.
- [26] G. K. Youngren and A. Acrivos. Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution. *J. Fluid Mech.*, 69:377–403, 1975.
- [27] J. F. Heiss and J. Coull. The effect of orientation and shape on the settling velocity of nonisometric particles in a viscous medium. *Chem. Eng. Progr.*, 48:133–140, 1952.
- [28] J. H. Masliyah and N. Epstein. Numerical study of steady flow past spheroids. *J. Fluid Mech.*, 44:493–512, 1970.
- [29] D. Lopez and E. Guazzelli. Inertial effects on fibers settling in a vortical flow. *Phys. Rev. Fluids*, 2:024306, 2017.
- [30] A. Roy, R. J. Hamati, L. Tierney, D. L. Koch, and G. A. Voth. Inertial torques and a symmetry breaking orientational transition in the sedimentation of slender fibres. *J. Fluid Mech.*, 875:576–596, 2019.
- [31] A. S. Khair and N. G. Chisholm. A higher-order slender-body theory for axisymmetric flow past a particle at moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 855:421–444, 2018.
- [32] T. A. Johnson and V. C. Patel. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.*, 378:19–70, 1999.
- [33] K. Fröhlich, M. Meinke, and W. Schröder. Correlations for inclined prolates based on highly resolved simulations. *J. Fluid Mech.*, 901:A5, 2020.
- [34] H. R. Pruppacher, B. P. Le Clair, and A. E. Hamielec. Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 44:781–790, 1970.
- [35] K. Jayaweera and B. J. Mason. The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 22:709–720, 1965.
- [36] Sir H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge Univ. Press, 1932.
- [37] A. Wachs. A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows: Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions. *Comput. Fluids*, 38:1608–1628, 2009.
- [38] T. J. Ui, R. G. Hussey, and R. P. Roger. Stokes drag on a cylinder in axial motion. *Phys. Fluids*, 27:787–795, 1984.
- [39] G. Kasper, T. Niida, and M. Yang. Measurements of viscous drag on cylinders and chains of spheres with aspect ratios between 2 and 50. *J. Aerosol Sci.*, 16:535–556, 1985.

Flow structure and loads over inclined cylindrical rodlike particles and fibers

Mohammed Kharrouba^{1,2}, Jean-Lou Pierson^{1a}, and Jacques Magnaudet^{2b}

¹*IFP Energies Nouvelles, 69360 Solaize, France and*

²*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT),
Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France*

SUPPLEMENTAL MATERIAL: REGIME MAPS AND CHARACTERISTIC WAKE PATTERNS IN LARGE-REYNOLDS-NUMBER FLOWS PAST INCLINED CYLINDERS

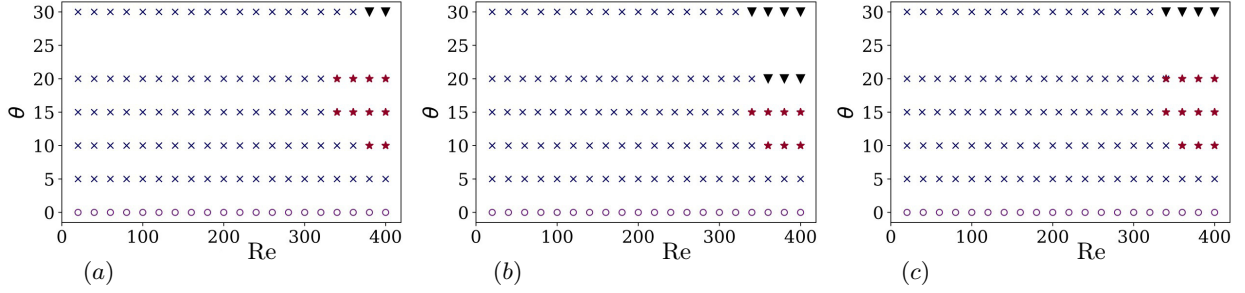


FIG. 1: Wake patterns as a function of θ and Re for (a) $\chi = 3$; (b) $\chi = 5$; (c) $\chi = 7$. Each symbol is associated with a specific wake pattern. \circ : steady toroidal standing eddy; \times : steady pair of counter-rotating streamwise vortices; \star : periodic shedding of double-sided hairpin vortices; \blacktriangledown : shedding of single-sided hairpin vortices.

Figure 1 provides maps of the hydrodynamic regimes observed in the (Re, θ) -plane for inclined cylinders with aspect ratios $\chi = 3, 5$ and 7 . As pointed out in the main text, the wake remains stationary and exhibits a planar symmetry up to a (χ, θ) -dependent critical Reynolds number larger than 300 . To visualize the wake pattern, we make use of the so-called Q -criterion [1], where Q is the difference between the Euclidean norm of the local rotation-rate tensor ω_{ij} and that of the local strain-rate tensor e_{ij} , *i.e.* $Q = \frac{1}{2}(e_{ij}e_{ij} - \omega_{ij}\omega_{ij})$. As Fig. 1 reveals, the steady non-axisymmetric wake regime is the one most frequently encountered in the (Re, θ) -range considered in the present investigation. Figure 2 shows the corresponding wake structure in a typical case: the wake is dominated by a pair of counter-rotating vortices of equal strength, similar to that found in the wake of a sphere just beyond the first bifurcation ($Re \approx 212$).

Unsteadiness arises when the inclination angle is increased beyond $7 - 8^\circ$ and the Reynolds number exceeds a critical value $Re_c(\chi, \theta)$ standing in the range $350 - 380$, depending on χ . For larger inclinations, say $15^\circ \lesssim \theta \lesssim 20^\circ$, Re_c decreases to ≈ 330 , before re-increasing somewhat at larger θ for $\chi = 3$ and 5 . For $Re \geq Re_c$ and $\theta \lesssim 20^\circ$, the wake dynamics is dominated by the shedding of double-sided hairpin vortices which preserve the planar symmetry observed in the previous regime. The hairpins are double-sided because vorticity is shed periodically on both sides of the direction of the main flow, as Fig. 3 exemplifies. The double-sided shedding mode is typical of finite-length cylinders held perpendicular to the incoming flow [2], although in this case the streamwise vortices are shed from the lateral surface, not from the ends as in the present situation. Figure 3(a) also makes it clear that the vortices form at both edges of the cylinder. The shedding is characterized by a single frequency, f , and the Strouhal number $St = fD/U$ is approximately 0.25 for $\chi = 5$.

For larger inclinations and $Re > Re_c$, the wake pattern changes, still preserving a symmetry plane. As Fig. 4 shows, single-sided hairpin vortices all oriented downwards with respect to the direction of the incoming flow are then shed from both ends of the cylinder. The Strouhal number based on the frequency of the dominant shedding mode is slightly less than in the previous regime; *e.g.* $St \approx 0.23$ instead of $St \approx 0.27$ for $\chi = 3$. The single-sided mode observed here is reminiscent of the first unsteady mode in the wake of a fixed sphere, found in the range $272 \lesssim Re \lesssim 350$ [3–6].

^a Email address for correspondence: jean-lou.pierson@ifpen.fr

^b Email address for correspondence: magnau@imft.fr

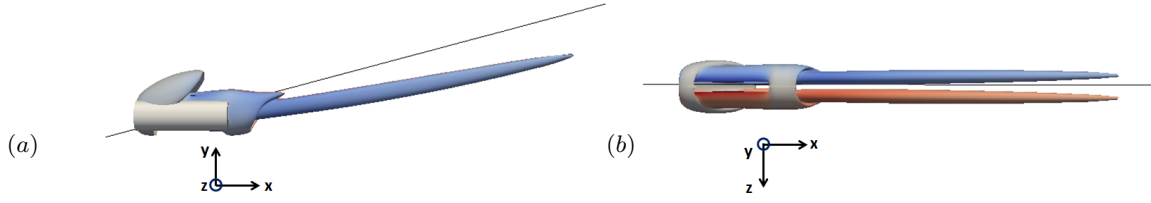


FIG. 2: Wake past an inclined cylinder with $\chi = 3$ at $\theta = 15^\circ$ and $\text{Re} = 300$; (a) side view, (b) top view. The two steady counter-rotating vortices are visualized using the $Q = 0.08$ iso-surface colored by the magnitude of the streamwise vorticity (normalized by U/D), ranging from -2 to 2 . The thin line indicates the direction of the upstream flow; the cylinder appears as a grey rectangle on the left of panel (a).

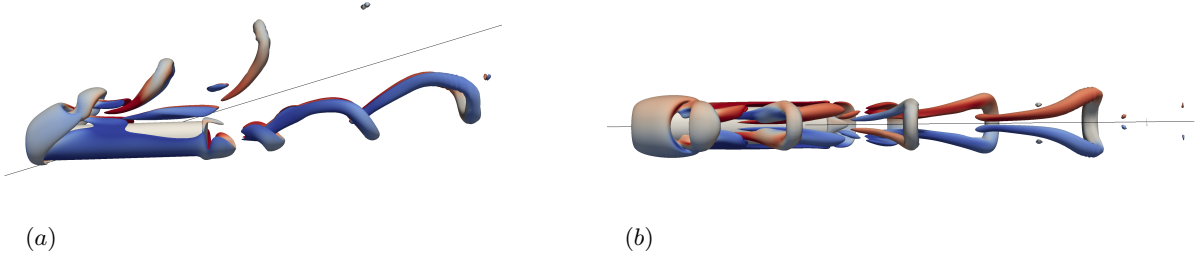


FIG. 3: Wake past an inclined cylinder with $\chi = 5$ at $\theta = 15^\circ$ and $\text{Re} = 400$; (a) side view, (b) top view. The double-sided hairpin vortices are visualized with the $Q = 0.25$ iso-surface colored by the magnitude of the normalized streamwise vorticity, ranging from -2 to 2 . The thin line indicates the direction of the upstream flow.

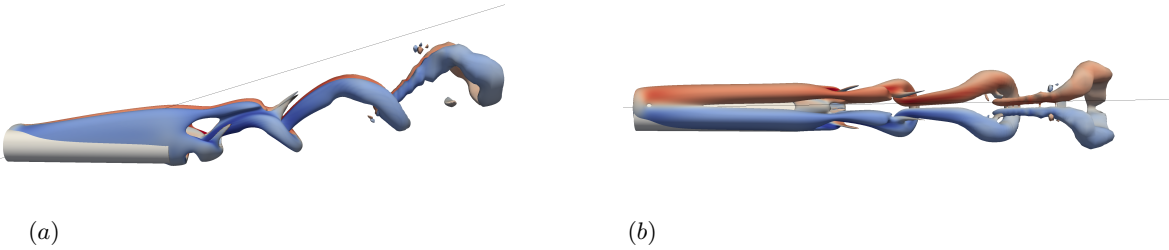


FIG. 4: Wake past an inclined cylinder with $\chi = 5$, $\theta = 20^\circ$ and $\text{Re} = 400$; (a) side view, (b) top view. The single-sided hairpin vortices are visualized with the $Q = 0.25$ iso-surface colored by the magnitude of the normalized streamwise vorticity, ranging from -2 to 2 . The thin line indicates the direction of the upstream flow.

-
- [1] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Center for Turbulence Research Report CTR-S88, 1988.
 - [2] O. Inoue and A. Sakuragi. Vortex shedding from a circular cylinder of finite length at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20:033601, 2008.
 - [3] T. A. Johnson and V. C. Patel. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.*, 378:19–70, 1999.
 - [4] R. Mittal. Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere. *AIAA J.*, 37:388–390, 1999.
 - [5] A. G. Tomboulides and S. A. Orszag. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *J. Fluid Mech.*, 416:45–73, 2000.
 - [6] D. Fabre, F. Auguste, and J. Magnaudet. Bifurcations and symmetry breaking in the wake of axisymmetric bodies. *Phys. Fluids*, 20:051702, 2008.

4. Rotation forcée d'un cylindre perpendiculairement à son axe de symétrie dans un fluide au repos

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la rotation imposée d'un cylindre de longueur L et de diamètre D dans un fluide au repos à l'infini. L'axe de rotation du cylindre est choisi perpendiculaire à son axe de symétrie. Comme détaillé en introduction, cette configuration n'a été que très peu étudiée, la plupart des études portant sur la rotation d'une sphère ou d'un cylindre autour de son axe de symétrie. Les rapports de forme choisis sont $\chi \in \{1; 2; 3; 6, 10, 15\}$ pour les bas nombres de Reynolds et nombre de Reynolds modérés ($Re \leq 10$) et $\chi \in \{2; 3; 5\}$ pour les nombres de Reynolds plus élevés $Re \in [20 : 240]$. Le nombre de Reynolds est défini en utilisant la vitesse aux extrémités du cylindre ($\Omega_z L/2$) : $Re = \Omega_z L D / (2\eta)$ où η est la viscosité cinématique et Ω_z la vitesse angulaire imposée. Dans la suite, les vitesses sont normalisées par $U = \Omega_z L/2$, les longueurs par $L/2$, la vorticité par Ω_z et la pression par $1/2\rho U^2$. Le moment hydrodynamique dans la direction z (perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre) est normalisé par $1/2\rho U^2 L^2 D$, ce qui définit le coefficient de couple $C_t = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2 D}$. Le plan du chapitre est le suivant. Dans un premier temps nous nous focalisons sur la dynamique de la rotation à petit nombre de Reynolds et à nombre de Reynolds modéré. Une attention particulière sera dédiée à la comparaison avec les résultats de la théorie des corps allongés. Dans un second temps nous nous intéressons aux couples et aux sillages pour des nombres de Reynolds plus élevés.

4.1. Des petits nombres de Reynolds $Re \ll 1$ aux nombres de Reynolds modérés $Re \sim 1$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'écoulement autour d'un cylindre en rotation pour des petits nombres de Reynolds et des nombres de Reynolds modérés. Le code de calcul

JADIM a déjà été utilisé avec succès pour simuler la rotation d'un disque infiniment mince en écoulement de Stokes ([Auguste, 2010](#)). Nous présentons dans un premier temps les résultats à bas nombre de Reynolds puis nous nous présenterons en quoi les effets inertiels modifient la structure de l'écoulement et le moment hydrodynamique.

4.1.1. Dynamique à petit nombre de Reynolds ($Re \ll 1$)

Structure de l'écoulement en régime stationnaire

Dans cette partie nous mettons en évidence l'influence du rapport de forme sur l'écoulement à bas Re . Pour cela nous comparons les champs de vitesse, de vorticité et de pression pour deux rapports de forme, $\chi = 3$ et $\chi = 10$. Comme il n'existe pas d'expression théorique de ces champs pour un cylindre en rotation (mis à part dans le cadre de la théorie des objets allongés décrite dans la prochaine sous-section), nous nous limitons à l'analyse qualitative de l'écoulement.

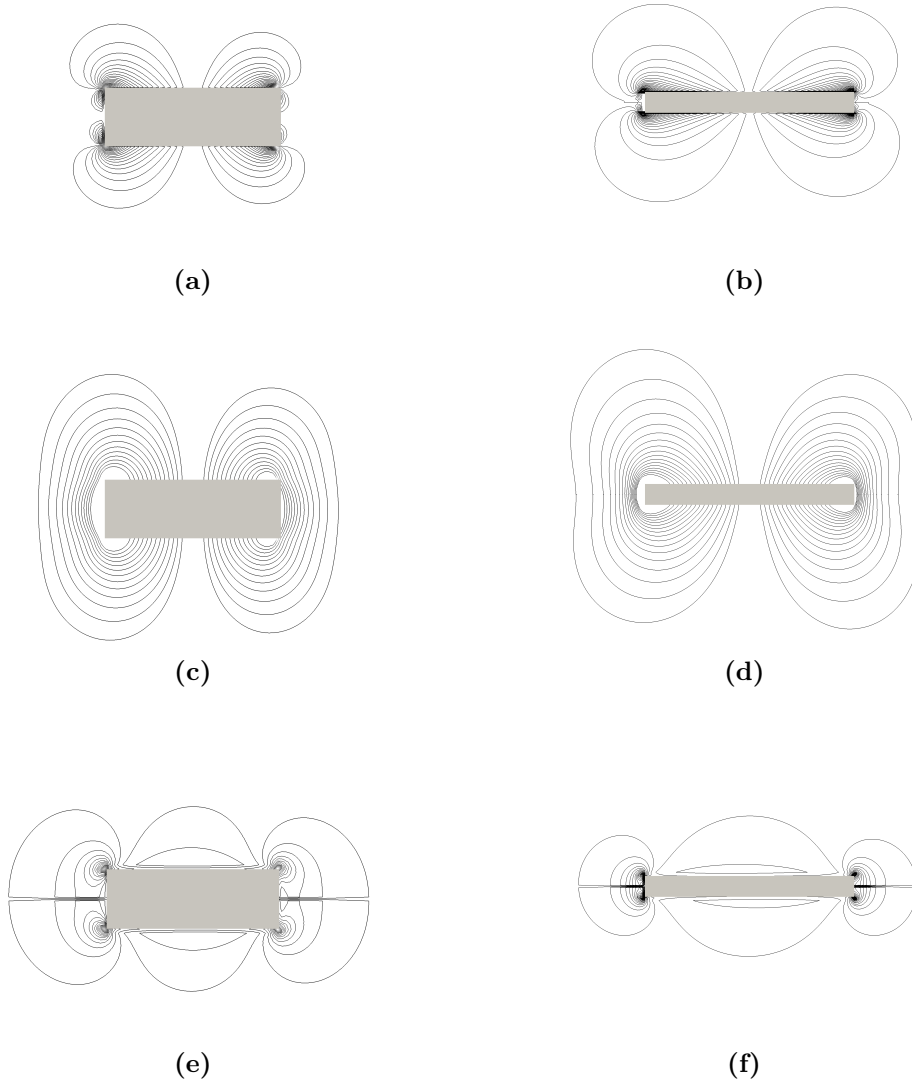


Figure 4.1. – Isocontours de (a,b) pression (c,d) vitesse radiale (e,f) vorticité selon z dans le plan $z = 0$   $Re = 0.05$.   gauche : $\chi = 3$ à droite : $\chi = 10$.

La figure 4.1 illustre les isocontours de pression, de vitesse radiale et de vorticité selon z pour deux rapports de forme $\chi = 3$ et $\chi = 10$. On observe deux plans de symétrie $x = 0$ et $y = 0$ du fait de la symétrie des écoulements de Stokes en plus du plan de symétrie $z = 0$ du   la symétrie axiale du corps cylindrique. Pour les deux rapport de forme, les extrema de pression et de vorticité selon z se situent sur les coins de l'objet. Par ailleurs, nous observons d'importantes similitudes des structures de l'écoulement pour les deux rapport de forme, indiquant une assez faible dépendance en χ . Ce point est rediscuté dans la partie suivante.

Moment hydrodynamique

Théorie des corps allongés (Batchelor, 1970) On considère un cylindre en rotation uniforme à la vitesse Ω_z autour de l'axe perpendiculaire à son axe de symétrie dans un écoulement de Stokes. D'après la théorie des corps allongés (Batchelor, 1970), et comme expliqué dans le chapitre précédent, la force sur une particule allongée ($\chi \gg 1$) en translation s'obtient par intégration le long de l'objet d'une distribution linéique de "Stokeslets". Le "Stokeslet" est la solution fondamentale des équations de Stokes engendrée par une force ponctuelle. Avec l'hypothèse $\chi \gg 1$, la densité de force appliquée sur le cylindre est donnée par Batchelor (1970) à l'ordre 2 :

$$f_y(x) = 4\pi\mu U_y \epsilon \left[\frac{1 - \epsilon/2 \log(1 - \frac{4x^2}{L^2})}{1 - \epsilon/2} \right] \quad (4.1)$$

où $\epsilon = 1/\log(2\chi)$ est le petit paramètre. Pour un corps en rotation suivant l'axe z et suffisamment allongé, la vitesse sur l'objet s'écrit à l'ordre dominant comme $U_y = \Omega_z x$. Notons la similarité avec un écoulement de cisaillement pur. Le couple hydrodynamique exercé sur le cylindre s'écrit : $T_z = -\int_{-L/2}^{L/2} x f_y(x) dx$ (Batchelor, 1970). Dans la suite nous dérivons le moment hydrodynamique à l'ordre 2, résultat qui n'a pas été obtenu à notre connaissance de manière exacte.

Au 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} T_z^{(1)} &= -\int_{-L/2}^{L/2} x f_y^{(1)}(x) dx \\ &= -\frac{\pi\mu L^3 \Omega_z \epsilon}{3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Au 2^{ème} ordre :

$$\begin{aligned} T_z^{(2)} &= -\int_{-L/2}^{L/2} x f_y^{(2)}(x) dx \\ &= -\frac{4\pi\mu\epsilon\Omega_z}{1 - \epsilon/2} \left[\frac{L^3}{12} - \frac{\epsilon}{2} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \log(1 - \frac{4x^2}{L^2}) dx \right] \end{aligned}$$

Notons que $\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \log(1 - \frac{4x^2}{L^2}) dx = 2 \int_0^{L/2} x^2 \log(1 - \frac{4x^2}{L^2}) dx = 2I$, où $I = \frac{-2L^3}{24} [\frac{4}{3} - \log 2]$. On en déduit que :

$$T_z^{(2)} = \frac{-\pi\mu\Omega_z L^3 \epsilon}{3} \left[\frac{1 + \epsilon(4/3 - \log 2)}{1 - \epsilon/2} \right] \quad (4.3)$$

L'expression au troisième ordre est ardue à obtenir analytiquement. Nous lui préférons l'ex-

pression numérique approchée obtenue par [Batchelor \(1970\)](#)

$$T_z^{(3)} = \frac{-\pi\mu\Omega_z L^3 \epsilon}{3} \left[\frac{1 + \epsilon(4/3 - \log 2)}{1 - \epsilon/2} + 1.019\epsilon^2 \right] \quad (4.4)$$

En faisant un développement limité en ϵ l'équation (4.4) devient :

$$T_z^{(3)} = \frac{-\pi\mu\Omega_z L^3 \epsilon}{3} \left[1 + \epsilon(11/6 - \log 2) + \epsilon^2 \left(\frac{11}{12} - \frac{\log 2}{2} + 1.019 \right) \right] \quad (4.5)$$

On prolonge l'expression du moment au quatrième ordre (voir [Pierson *et al.* \(2021\)](#)), et on obtient :

$$T_z^{(4)} = T_z^{(3)} - \frac{\pi\mu\Omega L^3 \epsilon^4}{3} \left[-\frac{5}{4}\zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2}\ln^2(2) - \frac{161}{12}\ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{4}\ln 2 \right) \right], \quad (4.6)$$

Comparaison avec les données numériques Nous nous proposons désormais de comparer nos résultats numériques avec les lois théoriques obtenues précédemment en utilisant la théorie des corps allongés.

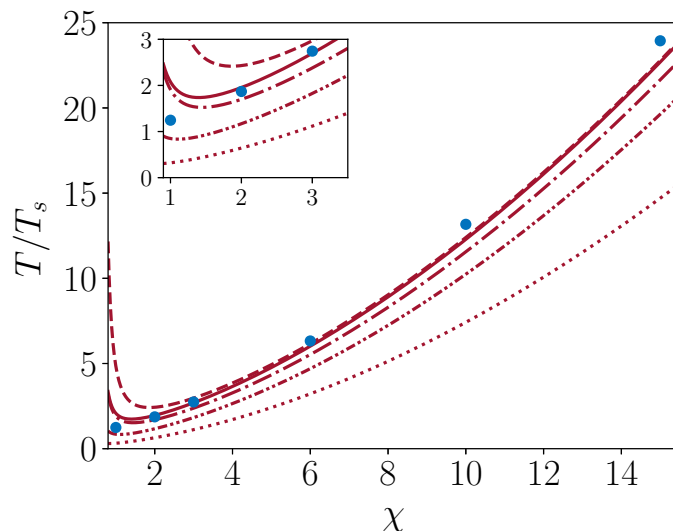


Figure 4.2. – Comparaison des résultats numériques à $Re = 0.05$ avec les moments théoriques prédits par la théorie des corps allongés [Batchelor \(1970\)](#). \star : résultats numériques, \dots : théorie des corps allongés à l'ordre 1, $-\dots$: théorie des corps allongés à l'ordre 2, $-\cdot-$: théorie des corps allongés à l'ordre 3, $---$: théorie des corps allongés à l'ordre 4 (expression 4.6), $-$: relation empirique (4.7).

Les figures 4.2 comparent les résultats numériques avec les lois théoriques obtenues précédemment. Nous notons que le moment sur le cylindre en rotation est bien supérieur à celui d'une sphère de volume équivalent en rotation avec la même vitesse angulaire. Ce n'est pas une

surprise : dans la limite des très grand χ , ce rapport tend vers l'infini comme $\chi^2/\log(2\chi)$. Nous remarquons également que plus l'ordre associé à la théorie augmente, plus la courbe théorique s'approche des résultats numériques pour les grand χ . Le développement à l'ordre 3 approche très bien les données numériques, et ce même pour des rapports de forme modérés ($\chi \approx 6$). Ce bon accord tend à montrer que la structure de l'écoulement et les efforts associés dépendent peu de χ pour $\chi \geq 6$. Pour des rapports de forme inférieurs, l'accord est moins bon du fait de la divergence en $\chi = 1/2$ du développement asymptotique, divergence exacerbée quand l'ordre du développement augmente. Nous proposons donc l'équation suivante qui tend vers le résultat théorique à l'ordre 3 pour les petits χ et celui à l'ordre 4 pour les grand χ :

$$T_z = -\frac{\pi\mu\Omega L^3}{3} \left[\epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{11}{6} - \ln 2 \right) + \epsilon^3 \left(\frac{161}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{3} \ln 2 + (\ln 2)^2 \right) + \epsilon^4 \left(1 - \frac{1}{(2\chi)^{1.2}} \right)^5 \left(-\frac{5}{4}\zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2} \ln^2(2) - \frac{161}{12} \ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{8} \ln(4) \right) \right) \right]. \quad (4.7)$$

Cette solution hybride offre de très bon résultats aussi bien à petit χ qu'à grand χ . Nous constatons néanmoins que pour $\chi = 15$ l'écart relatif par rapport aux résultats numériques est légèrement plus important que pour $\chi = 10$. Plusieurs explications à cela peuvent être données. D'une part, le domaine numérique pour $\chi = 15$ n'est peut-être pas suffisamment grand et des effets de confinement apparaissent. D'autre part, le nombre de Reynolds associé à la longueur de l'objet pour $\chi = 15$ est d'ordre 1 et les effets inertiels sont donc probablement non-négligeables. Il s'est avéré d'après la figure 4.2 que le moment exercé sur un cylindre de rapport de forme 1 est plus petit que celui exercé sur une sphère de volume équivalent. Grâce au théorème du minimum de dissipation (Pierson *et al.* (2021)), le moment exercé sur une cylindre court peut être estimé en considérant un cylindre incluant une sphère et inclus dans une autre. Dans ce cas, le moment exercé sur un cylindre $\chi = 1$ est estimé $8\pi\mu D^3\Omega_z \leq T \leq 8\sqrt{2}\pi\mu D^3\Omega_z$. Donc le moment normalisé est dans l'intervalle $2/3 \leq T/T_s \leq 2\sqrt{2}/3$. Numériquement, $T/T_s = 0.81$ est en bon accord avec la gamme des valeurs données par le théorème du minimum de dissipation.

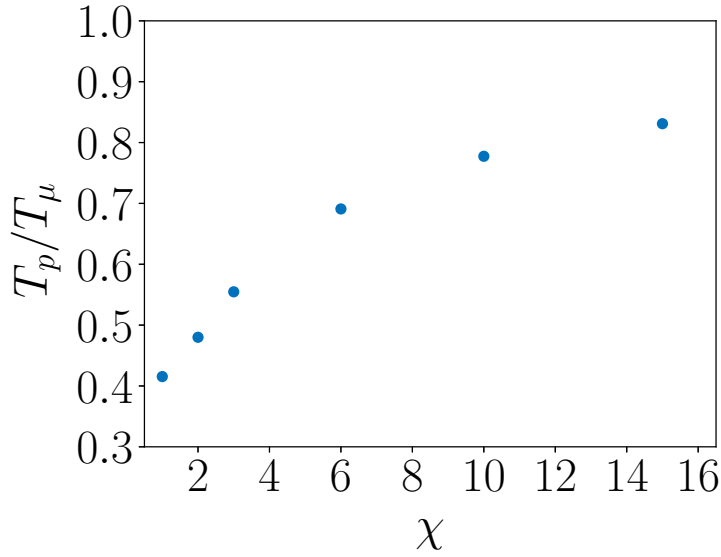


Figure 4.3. – Rapport de la contribution de pression au moment hydrodynamique sur la contribution visqueuse pour $Re = 0.05$.

Nous évaluons désormais les contributions de la pression et des contraintes visqueuses sur le moment total. D’après la figure 4.3, la contribution de la pression au moment total est presque deux fois moins importante que celle des contraintes visqueuses ($T_p/T_\mu \approx 0.41$ pour $\chi = 1$) pour les petits rapports de forme ($\chi \leq 2$). En augmentant le rapport de forme, cette contribution augmente d’une manière conséquente pour atteindre 80% de la contribution des contraintes visqueuses pour $\chi = 10$, contrairement à la sphère où les contributions de pression son nulles. De manière remarquable, ce rapport de contributions tend vers une constante estimée à environ 0.83 comme le montre la figure 4.3 pour $\chi \geq 15$.

4.1.2. Des petits nombres de Reynolds aux nombres de Reynolds modérés

Dans cette partie nous mettons en exergue les principales différences par rapport au régime de Stokes quand les effets inertiels deviennent non-négligeables.

Structure de l'écoulement

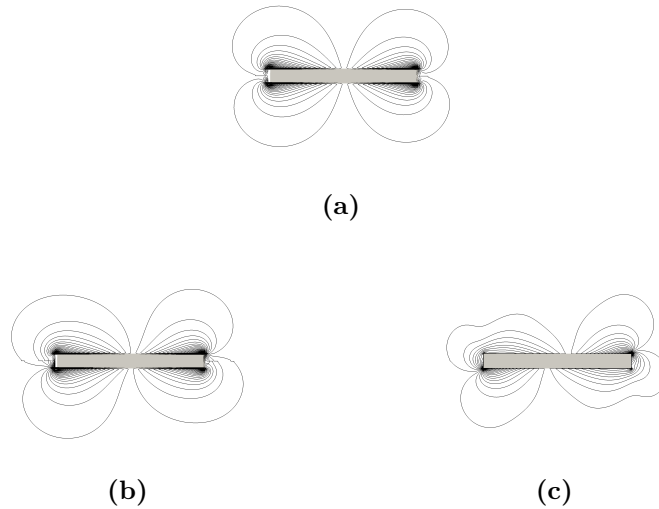


Figure 4.4. – Isocontours de pression pour $\chi = 10$. (a) $Re = 0.05$ (b) $Re = 1$ (c) $Re = 10$.

L'effet de l'inertie sur l'écoulement est illustré par la figure 4.4 qui représente l'évolution d'isocontours de pression dans le plan $z = 0$ pour $\chi = 10$ depuis un bas nombre de Reynolds ($Re = 0.05$) jusqu'à un Re modéré ($Re = 10$). A $Re = 0.05$, l'écoulement est symétrique tandis qu'à $Re = 1$ les isocontours de pression se déforment et une dissymétrie apparaît, qui s'amplifie bien sûr pour $Re = 10$.

Moment hydrodynamique

Dans cette partie nous nous basons sur l'expression du moment obtenu à l'aide de la théorie des objets allongés à l'ordre 3 pour construire une loi de moment valable pour des nombres de Reynolds modérés jusqu'à $Re = 10$.

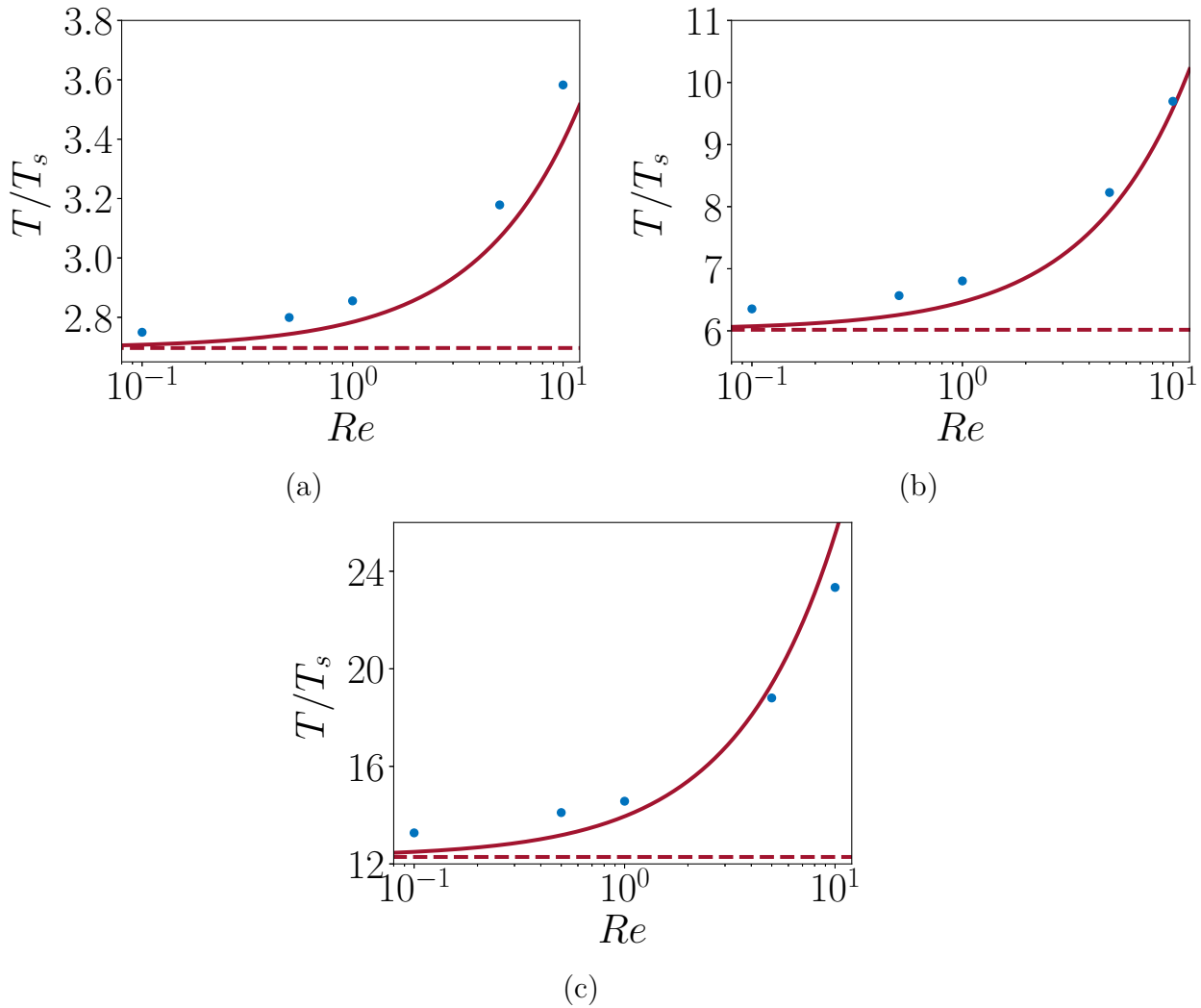


Figure 4.5. – Evolution du moment normalisé en fonction de Re pour : (a) $\chi = 3$, (b) $\chi = 6$ et (c) $\chi = 10$. — équation (4.7), – équation (4.8).

La figure 4.5 montre l'évolution du moment normalisé par le moment sur une sphère en rotation de même volume en fonction du nombre de Reynolds et pour différents rapports de forme. Pour tous les χ , le moment hydrodynamique augmente avec le nombre de Reynolds. Nous notons néanmoins d'importantes variations en fonction de χ . Pour $\chi = 3$, la variation du moment entre $Re = 0.05$ et $Re = 10$ est de moins de 50% tandis que pour $\chi = 10$ elle est de 100%. Ainsi les effets inertiels sont plus importants pour de longs cylindres. L'augmentation du moment avec le nombre de Reynolds rend caduque l'expression (4.7) pour la prédiction en régime inertiel. Comme dans le chapitre précédent nous proposons une modification de l'équation (4.7) pour mieux reproduire les résultats numériques. Nous proposons donc l'équation suivante qui tend vers l'expression modifiée du moment (4.7) quand Re tend vers 0 :

$$T = \frac{-\pi\mu\Omega L^3}{3} \left[\epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{11}{6} - \ln 2 + f(\chi, Re) \right) + \epsilon^3 \left(\frac{161}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{3} \ln 2 + (\ln 2)^2 \right) + \epsilon^4 \left(1 - \frac{1}{(2\chi)^{1.2}} \right)^5 \left(-\frac{5}{4}\zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2} \ln^2(2) - \frac{161}{12} \ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{4} \ln 2 \right) \right) \right], \quad (4.8)$$

Avec $f(\chi, Re) = 0.0337\chi^{1.3}Re^{0.9}$

Comme le montre la figure 4.5, l'expression (4.8) reproduit bien les résultats numériques pour $\chi \geq 6$. Nous arrivons donc à prendre en compte les effets inertiels en nous basant sur l'expression (4.7) valable établie pourtant pour $Re = 0$. Par contre, un écart important est observé entre les prédictions de l'équation (4.8) et les résultats numériques pour $\chi = 3$, et la loi empirique surestimant le moment sur le cylindre.

4.2. Dynamique à grand nombre de Reynolds

4.2.1. Écoulement autour du cylindre en rotation

Nous présentons ici l'analyse physique de l'écoulement autour du cylindre en rotation forcée pour de grands nombres de Reynolds. Nous nous intéressons particulièrement à la zone du fluide perturbée par la rotation du cylindre, et nous examinons l'influence des paramètres adimensionnels (Re , χ) sur les grandeurs physiques comme la pression, la vorticité ou la vitesse dans cette zone perturbée.

Evolution du sillage avec le nombre de Reynolds



Figure 4.6. — Visualisation du sillage autour d'un cylindre pour $\chi = 3$ avec le critère $Q = 10^{-3}$ coloré par la vorticité ω_z allant de -1 à 1 . La visualisation est réalisée dans le plan (x, y) . (a) $Re = 60$, (b) $Re = 180$.

La figure 4.6 illustre l'évolution du sillage autour du cylindre en rotation lorsqu'on augmente Re pour un rapport de forme fixé ($\chi = 3$). A petit nombre de Reynolds ($Re \ll 1$), comme nous l'avons vu dans la section précédente, nous n'observons pas de tourbillons dans le sillage. En augmentant le nombre de Reynolds, il apparaît un sillage constitué de deux paires de tourbillons contra-rotatifs, générés aux deux extrémités du cylindre. Ceux-ci sont ensuite advectés du fait de la rotation du cylindre et prennent une forme circulaire. L'origine des deux paires de tourbillons est due aux effets inertiels. En augmentant le nombre de Reynolds, les deux paires de tourbillons s'allongent. Ce phénomène peut être relié à la plus grande quantité de vorticité générée sur le cylindre quand Re augmente.



Figure 4.7. – Visualisation du sillage autour d'un cylindre pour $\chi = 3$ à $Re = 220$ avec le critère $Q = 1.10^{-3}$ coloré par la vorticité ω_z allant de -1    1 (a) vue dans un plan z fixé (b) vue dans un plan y fixé.

La figure 4.7 présente une visualisation 3D de la structure tourbillonnaire mise en évidence précédemment dans le plan contenant l'axe de symétrie (figure 4.7(a)) du cylindre et dans le plan perpendiculaire à cet axe (figure 4.7(b)). L'écoulement conserve bien une symétrie par rapport au plan $z = 0$. Cette symétrie se maintient pour tous les nombres de Reynolds et rapports de forme étudiés ici. En plus de cette symétrie, l'écoulement comporte également une symétrie correspondant à la composition de deux symétries planes successives : l'une par rapport au plan $x = 0$, l'autre par rapport au plan $y = 0$.

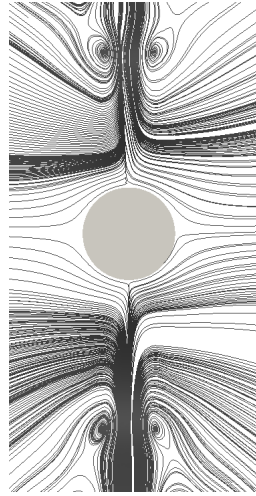


Figure 4.8. — Lignes de courant basées sur la vitesse projetée dans le plan ($z = 0$) perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre pour ($\chi = 3, Re = 220$).

La figure 4.8 montre une visualisation des lignes de courant dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre $\chi = 3$. Quatre petites zones de recirculation sont mises en évidence, qui correspondent aux deux paires de tourbillons contra-rotatifs observés dans la figure 4.7.

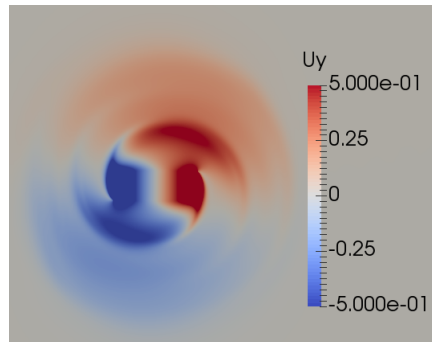


Figure 4.9. — Champ de vitesse U_y pour $\chi = 3$ à $Re = 220$.

La zone perturbée par la mise en rotation du cylindre a une forme circulaire comme l'illustre la figure 4.9. En dehors de cette zone, le fluide est au repos. Bien entendu, la vitesse diminue graduellement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du cylindre. Des données plus quantitatives sur l'évolution de la vitesse sont données par la suite.

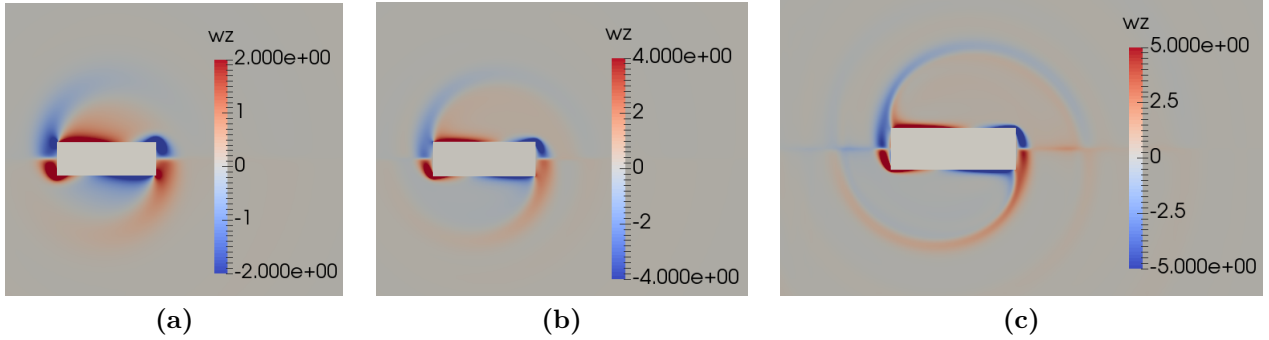


Figure 4.10. – Champ de vorticité ω_z pour $\chi = 3$ dans le plan $z = 0$. (a) $Re = 20$, (b) $Re = 60$ (c) $Re = 180$.

Les champs de vorticité dans le plan $z = 0$ sont représentés sur la figure 4.10 pour différents nombres de Reynolds. Plus on s'éloigne du cylindre, plus l'intensité de la vorticité selon z générée principalement sur les coins diminue. Cette vorticité est évacuée sous forme d'un sillage circulaire en aval par rapport au sens de rotation du cylindre. Nous constatons aussi sans surprise, que plus Re est grand plus l'intensité de la vorticité selon z est importante. Cette augmentation est attendue et d'après la théorie de la couche limite, elle suit une loi en $Re^{1/2}$.

Nous nous intéressons désormais à l'évolution de la vitesse et de la vorticité le long de l'axe y . Ces champs correspondants ayant des formes circulaires comme l'ont montré les figures 4.9 et 4.10, nous choisissons de nous placer au centre de ces cercles, i.e. en $x = 0$ pour examiner ces évolutions.

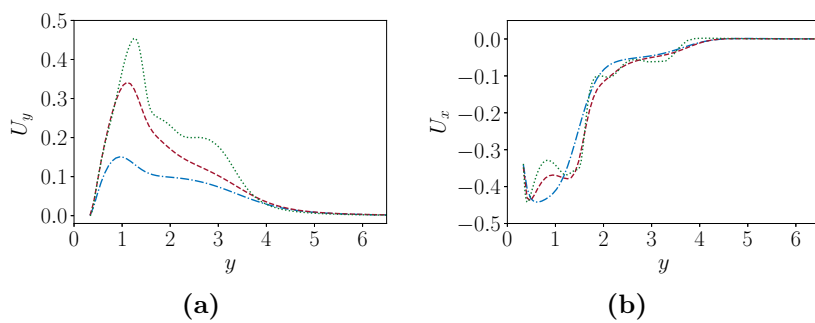


Figure 4.11. – Evolution de la vitesse pour $\chi = 3$ selon l'axe y , perpendiculaire à l'axe du cylindre passant par le point $(x = 0, y = 0)$ dans le plan $z = 0$. \cdots : $Re = 20$, $---$: $Re = 60$, $---$: $Re = 180$. (a) vitesse selon y , (b) vitesse selon x .

D'après la figure 4.11, la vitesse selon y est nulle pour $y = 1/3$ (rappelons que les distances sont normalisées par $L/2$), puis augmente pour atteindre un maximum pour $y \approx 1$. Ce maximum augmente en fonction du nombre de Reynolds. U_y décroît ensuite pour s'annuler loin du

cylindre. Avant d'atteindre $U_y \approx 0$, la vitesse connaît deux changements de pente vers $y \approx 1.6$ et $y \approx 3$ à $Re = 180$. La figure 4.11(b) représente l'évolution de la vitesse axiale et montre que U_x

et U_y sont du même ordre de grandeur mais de signes opposés. En effet, U_x est négative car le cylindre tourne dans le sens anti-horaire et entraîne le fluide dans la direction $-\mathbf{e}_x$. Pour $y = 1/3$, $U_x = -1/3$ du fait de la cinématique de rotation imposée. Le nombre de Reynolds influence très peu l'évolution de U_x comme on le constate sur la figure 4.11(b).

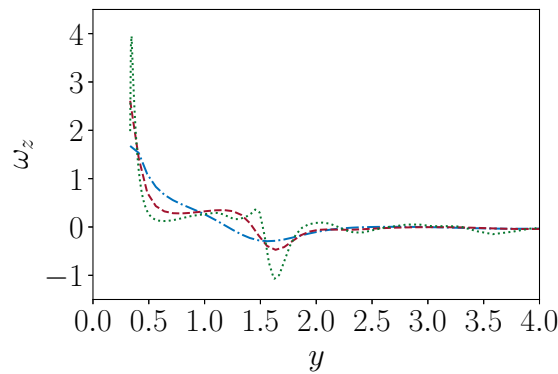


Figure 4.12. – Evolution de la vorticité ω_z selon l'axe y , perpendiculaire à l'axe du cylindre passant par le point $(x = 0, y = 0)$ dans le plan $z = 0$ pour $\chi = 3$. $-\cdot-$: $Re = 20$, $--$: $Re = 60$, \cdots : $Re = 180$.

La vorticité selon z est maximale sur la surface du cylindre comme le montre la figure 4.12. Plus le régime est inertiel plus l'intensité de la vorticité augmente. Son évolution pour des nombres de Reynolds élevés (≥ 60) semble suivre une loi en $Re^{1/2}$ en accord avec la prédiction de la théorie de la couche limite. En s'éloignant du cylindre, la vorticité est advectée et diffusée et son intensité diminue fortement. Ainsi pour des distances d'environ L ($y \approx 1$) la vorticité selon z est quasi-nulle pour tous les nombres de Reynolds. On constate néanmoins que cette diminution n'est pas monotone. En particulier la vorticité change de signe pour $Re = 180$ où elle prend une valeur négative. Cela signifie que dans cette zone, la rotation locale des particules fluides se fait dans le sens contraire de celle du cylindre. Ce changement de signe indique que le fluide ne tourne pas d'un bloc, et donc que l'écoulement ne correspond pas un mouvement de type "rotation solide" dans la zone perturbée.

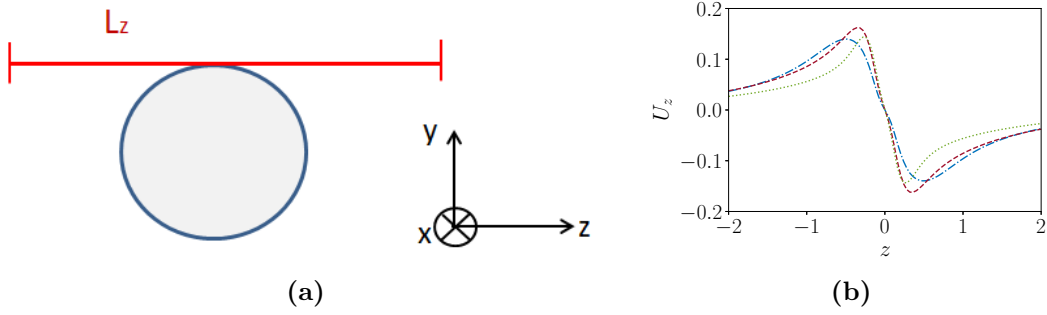


Figure 4.13. – (a) Coupe 2D dans le plan (y, z) du cylindre en rotation. La droite notée L_z est parallèle à l'axe z , comprise dans le plan $x = 0$ et passe par le point $x = 0, y = 1/\chi$. (b) Evolution de la vitesse U_z le long de la droite L_z pour $\chi = 3$. \cdots : $Re = 20$, $---$: $Re = 60$, $- \cdot -$: $Re = 180$.

Considérons l'évolution de U_z le long de la droite L_z indiquée sur la figure 4.13. La vitesse U_z a une évolution croissante en partant de $z = -2$, atteint un maximum en $z = -1/3$ (point situé sur un plan affleurant la surface latérale du cylindre), puis commence à décroître jusqu'à atteindre la surface du cylindre en $z = 0$ où elle s'annule. La figure 4.13(b) atteste également de la présence du plan de symétrie en $z = 0$.

Nous étudions maintenant l'impact de Re sur le champ de pression dans la zone du fluide perturbée et notamment aux coins du cylindre où la vitesse est maximale.

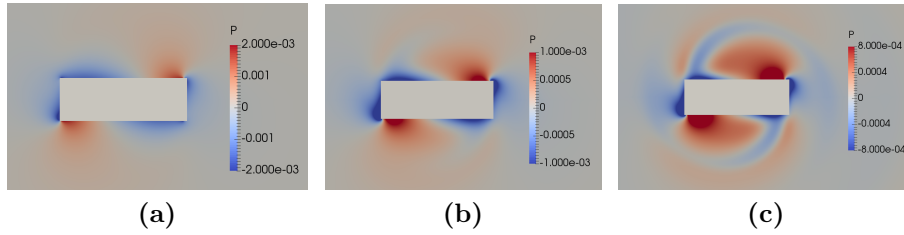


Figure 4.14. – Champ de pression pour $\chi = 3$ (a) $Re = 20$, (b) $Re = 60$, (c) $Re = 180$.

La perturbation de pression est maximale aux coins du cylindre. Notons également la symétrie $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ des contours. La trace des deux paires de tourbillons longitudinaux (voir figure 4.6 (b)) est visible dans le champ de pression et on constate que leur intensité augmente avec le nombre de Reynolds.

Evolution du sillage en fonction du rapport de forme

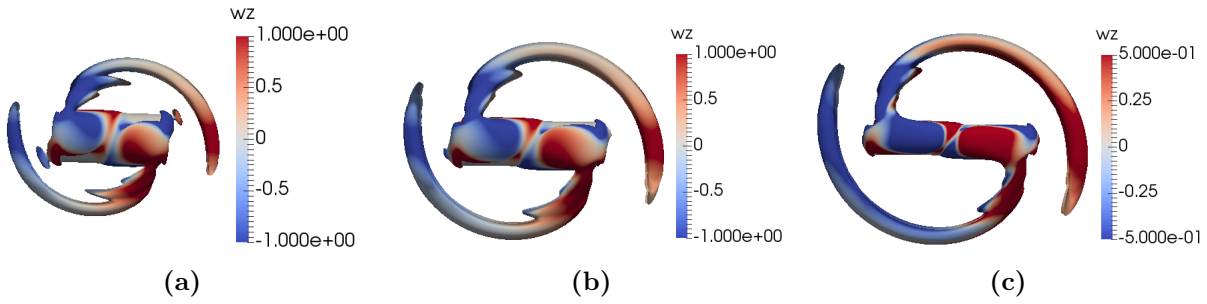


Figure 4.15. – Visualisation du sillage autour du cylindre à $Re = 220$ avec le critère $Q = 1.10^{-3}$ coloré par la vorticité ω_z dans le plan (x, y) . (a) $\chi = 2$, (b) $\chi = 3$, (c) $\chi = 5$.

La figure 4.15 montre le sillage du cylindre pour différents rapports de forme et à Re fixé. On observe deux paires de tourbillons contrarotatifs symétriques par rapport au plan $z = 0$. On note très peu d'influence du rapport de forme sur les structures tourbillonnaires.

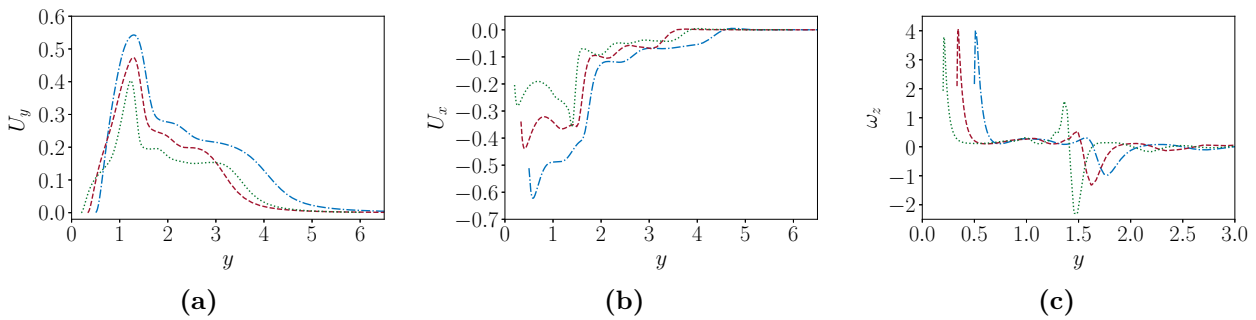


Figure 4.16. – Evolution de la vitesse et de la vorticité selon une droite perpendiculaire à l'axe du cylindre passant par le point $(x = 0, y = 0)$ dans le plan $z = 0$ à $Re = 220$. \cdots : $\chi = 2$, $---$: $\chi = 3$, \dots : $\chi = 5$ (a) : vitesse selon y , (b) : vitesse axiale, (c) : vorticité selon z .

A Re fixe, l'évolution des vitesses U_y et U_x a la même allure pour les trois rapports de forme étudiés comme le montrent les figures 4.16 (a) et (b). Nous notons que la vitesse U_y diminue faiblement avec le rapport de forme. Contrairement à l'évolution de U_y , une forte influence de χ est observée sur la vitesse U_x près du cylindre, typiquement dans la zone $0.5 \leq y \leq 1.5$. Pour $y \geq 1.5$, les trois courbes se rejoignent avec des oscillations de faible amplitude. La vorticité selon z n'est pas influencée par le rapport de forme pour $y \leq 1$. Nous notons cependant que pour $y \geq 1$ des oscillations importantes sont observées dont l'amplitude augmente avec le rapport de forme.

4.2.2. Forces hydrodynamiques à grand nombre de Reynolds

Il est vrai que la résultante des forces hydrodynamiques subies par un corps en rotation pure dans un fluide au repos est nulle. Néanmoins, nous examinons ici les contributions des forces sur chaque face du cylindre, de façon à préciser quelle face subit les efforts les plus importants et quel type de force (visqueuse ou de pression) y contribue le plus.

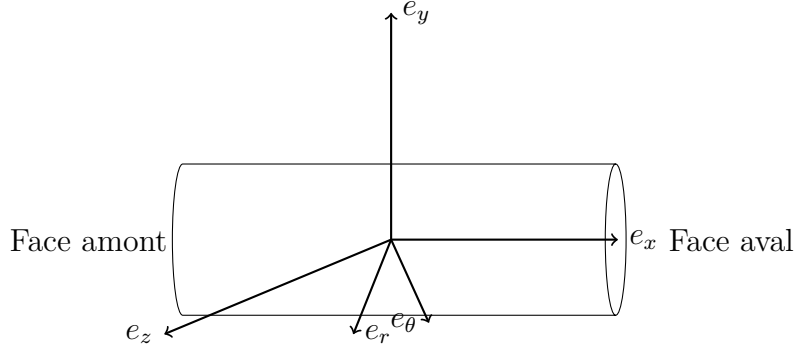


Figure 4.17. – Schéma du cylindre dans le repère cartésien (e_x, e_y, e_z) .

Nous présentons uniquement les évolutions des forces pour $\chi = 3$, car nous considérons que les conclusions tirées sur ces évolutions restent valables pour les autres rapports de forme. Les forces sont normalisées par $1/8\rho\Omega^2\pi DL^3$ en considérant la surface latérale du cylindre.

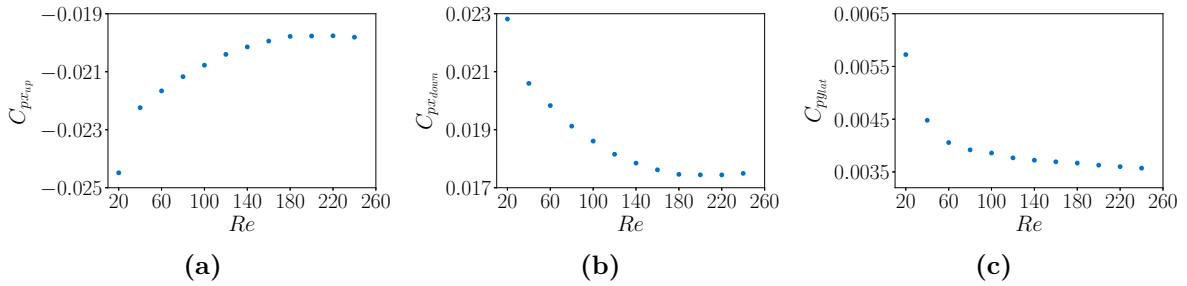


Figure 4.18. – Coefficient de force de pression pour $\chi = 3$. (a) face amont (b) face aval (c) face latérale.

La figure 4.18 illustre l'évolution du coefficient de la force de pression appliquée sur les trois faces du cylindre. Sur les deux faces amont et aval, cette force est portée uniquement par \mathbf{e}_x (parallèle à l'axe du cylindre). Les contributions de pression sur ces deux faces sont de signe opposé avec la même intensité. Ceci est dû à la symétrie de la configuration, déjà observée dans la figure 4.7. C_p possède une évolution monotone décroissante en Re sur toutes les faces et tend vers une constante à grand Re . Sur la surface latérale, la force de pression est perpendiculaire à l'axe du cylindre et son intensité est trois fois moins importante que sur les faces amont et aval.

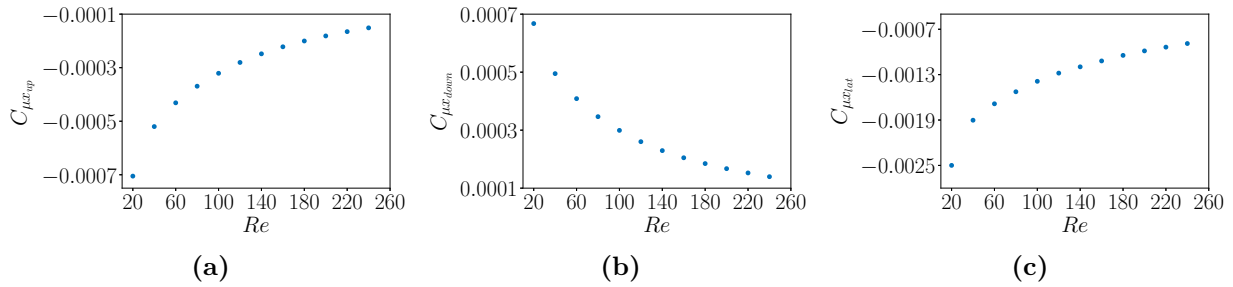


Figure 4.19. – Coefficient de force visqueuse parallèle à l’axe du cylindre pour $\chi = 3$. (a) face avant (b) face aval (c) face latérale.

Examinons maintenant l’évolution de la force visqueuse parallèle au cylindre sur toutes les faces. Cette évolution est illustrée sur la figure 4.19. Il s’avère que par symétrie, les forces visqueuses sur les faces avant et aval sont aussi opposées de signe et de même intensité. Sur la surface latérale, la force visqueuse est supérieure à celle exercée sur les deux faces avant et aval, et ce quel que soit le nombre de Reynolds.

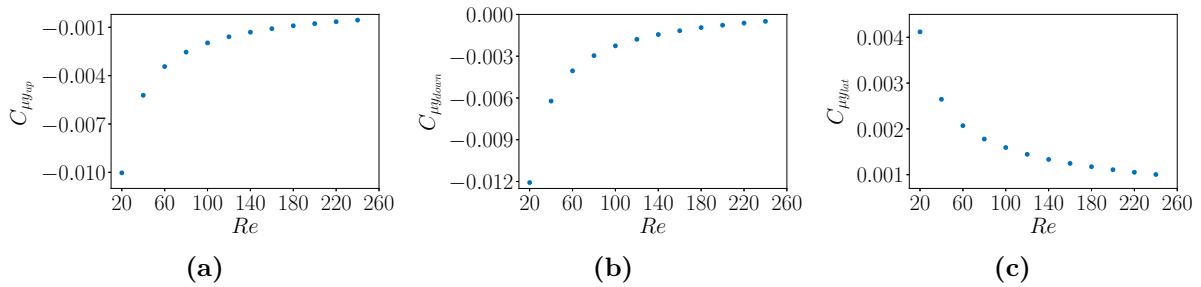


Figure 4.20. – Coefficient de force visqueuse perpendiculaire à l’axe du cylindre pour $\chi = 3$. (a) face avant (b) face aval (c) face latérale.

La figure 4.20 présente l’évolution du coefficient de la force visqueuse perpendiculaire à l’axe du cylindre, et montre clairement que sur les deux faces avant et aval il s’oppose à celui sur la face latérale. En terme d’intensité, les contributions visqueuses sur les disques sont plus importantes que celles sur la face latérale, mais ces contributions tendent presque vers la même valeur à grand nombre de Reynolds.

Finalement, l’analyse des forces nous amène à conclure que les forces de pression appliquées sur les disques sont dominantes par rapport aux forces qui s’exercent autres sur la face latérale.

4.2.3. Moment hydrodynamique à grand nombre de Reynolds

Dans cette section nous nous proposons d'établir une loi de comportement du moment hydrodynamique dépendant des deux paramètres (Re, χ) valable pour $Re \gg 1$. Afin de construire cette loi, nous nous basons sur les contributions visqueuses et de pression au moment hydrodynamique. Nous détaillons aussi les différentes contributions appliquées sur les trois faces du cylindre afin d'identifier celle qui contribue le plus à la résistance du fluide au mouvement du cylindre. Dans toute cette partie, les commentaires sont faits relativement à la norme du coefficient du moment hydrodynamique, qui est généralement négatif. Tout d'abord, nous regardons les expressions mathématiques du moment sur chaque face du cylindre. Le moment total est donné par l'expression : $\mathbf{T} = \int_{Sp} \mathbf{r} \times \sigma \cdot \mathbf{n} dS$, avec \mathbf{r} le vecteur position, σ le tenseur des contraintes, \mathbf{n} le vecteur normal à la surface. Le vecteur position sur les deux disques en coordonnées cylindriques (r, θ, x) : $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \pm L/2\mathbf{e}_x$. Sur les deux faces aval et amont le moment selon z s'écrit respectivement $T_{z_{av}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} -L/2 \cos \theta \sigma_{\theta x} - (L/2 \sigma_{rx} - r \sigma_{xx}) \sin \theta r dr d\theta$ et $T_{z_{am}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} -L/2 \cos \theta \sigma_{\theta x} - (L/2 \sigma_{rx} + r \sigma_{xx}) \sin \theta r dr d\theta$. Comme l'écoulement est symétrique par rotation de π , la somme des contributions au moment sur les deux disques est : $T_{z_{av}} + T_{z_{am}} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} r^2 \sigma_{xx} \sin \theta dr d\theta$. Nous constatons donc, que les contributions au moment sur les deux disques se cumulent.

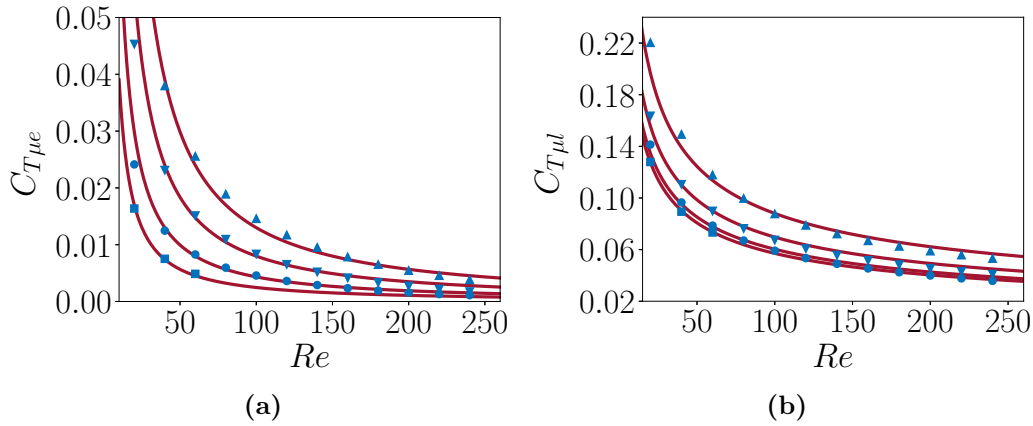


Figure 4.21. – Coefficient du moment visqueux en fonction de Re . (a) face aval (b) face latérale. \blacktriangle : $\chi = 2$, \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$, $-$: loi empirique (4.10).

Tout d'abord nous nous intéressons aux contributions visqueuses au moment. Les figures 4.21 montrent l'évolution du moment visqueux en fonction du nombre de Reynolds sur les deux faces du cylindre. Comme les contributions visqueuses sur les deux disques sont identiques par symétrie nous présentons que ceux contribuent donc pas au moment total, comme nous l'avons constaté précédemment par calcul théorique du moment. Pour cette raison, nous modélisons

uniquement l'évolution du moment visqueux $C_{t\mu_{lat}}$ sur la face latérale. La loi empirique que nous obtenons s'écrit :

$$C_{t\mu_e} \approx 7.5\chi^{-1.2}Re^{-1.2} \quad (4.9)$$

$$C_{t\mu_{lat}} \approx \frac{-1.16\chi^{-0.42}}{\sqrt{Re}} \quad (4.10)$$

Le coefficient du moment visqueux a bien une évolution décroissante en Re et tend vers 0 à grand nombre de Reynolds. Pour chaque rapport de forme la contribution visqueuse évolue en $1/\sqrt{Re}$, ce qui montre que les effets de la couche limite sont dominants dans la contribution visqueuse. Nous observons une légère dépendance en χ à grand Re à partir de $\chi = 3$ où les courbes ont tendance à se superposer. D'après la figure 4.21(c), la loi empirique (4.10) reproduit bien nos résultats numériques.

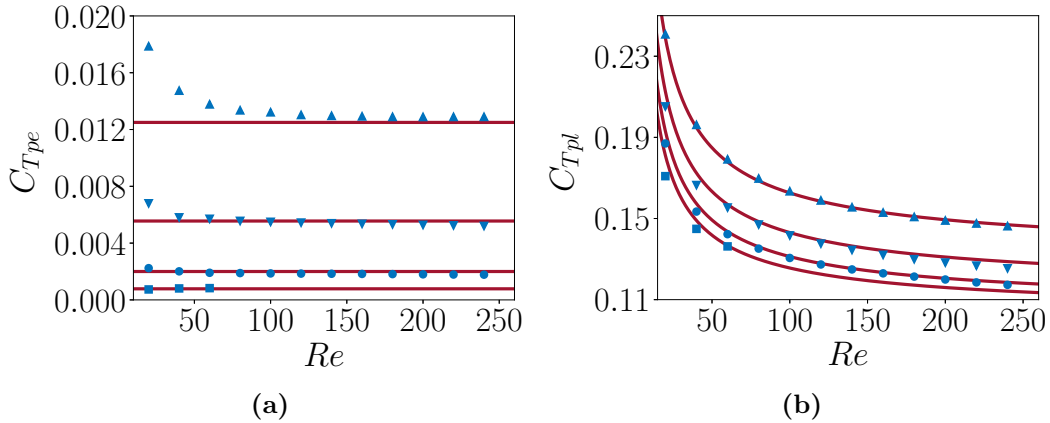


Figure 4.22. – Coefficient du moment de pression en fonction de Re . (a) face aval (b) face latérale. \blacktriangle : $\chi = 2$, \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$, $-$: loi empirique (4.11).

Les figures 4.22(a)-(b) montrent l'évolution du moment de pression en fonction du nombre de Reynolds sur les deux faces du cylindre. Les contributions de pression sur les deux disques sont identiques. Ceci est encore dû aux symétries imposées par la rotation, car la notion d'aval et d'amont n'a plus de sens dans cette configuration. Le moment de pression doit donc avoir la même intensité sur les deux disques. Il est beaucoup moins important que celui sur la face latérale. Pourtant, nous avons vu sur les figures 4.18 que les forces de pression sont importantes

sur les disques. La raison de cette différence vient bien sûr du bras de levier. En effet, seul le rayon du cylindre intervient dans le calcul du moment de pression sur les disques, tandis que c'est la longueur du cylindre qui intervient sur la surface latérale. La figure 4.22(a) montre que ces contributions ne dépendent que de χ et nous estimons $C_{tp_{est}} = C_{tp_{ouest}} = 0.05\chi^{-2}$.

Le coefficient du moment de pression sur la face latérale a une évolution décroissante en Re et tend vers une constante dépendante de χ . Nous proposons une loi empirique pour modéliser cette évolution sous la forme :

$$C_{tp_{lat}} \approx 1.21\chi^{-0.23}Re^{-0.75} + 0.12\chi^{-2} + 0.1. \quad (4.11)$$

La figure 4.22(c) montre un bon accord entre la loi empirique (4.11) et nos résultats numériques.

La somme des contributions sur les trois faces donne finalement la loi du moment total appliqué sur le cylindre :

$$C_T(\chi, Re) = 15\chi^{-1.2}Re^{-1.2} + 1.21\chi^{-0.23}Re^{-0.75} + (1.32\chi^{-2} + 0.55)Re^{-1/2} + 0.22\chi^{-2} + 0.1. \quad (4.12)$$

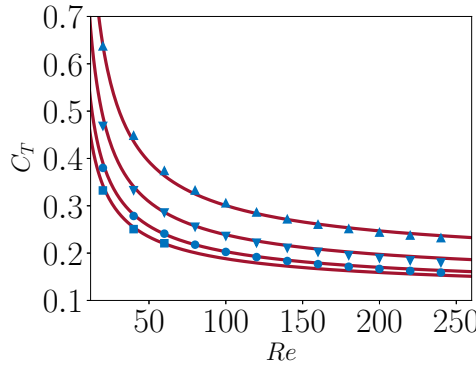


Figure 4.23. – Coefficient du couple hydrodynamique en fonction de Re . — : Loi empirique (4.12), résultats numériques pour : \blacktriangle : $\chi = 2$, \bullet : $\chi = 3$, \star : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$.

La figure 4.23 montre une décroissance de C_t en fonction de Re et en χ , qui devrait atteindre une valeur constante à très grand nombre de Reynolds d'après la loi empirique (4.12). L'écart relatif entre la loi empirique (4.12) et les résultats numériques est de moins de 2% quelque soit Re .

CHAPITRE 4. ROTATION FORCÉE D'UN CYLINDRE PERPENDICULAIREMENT À SON AXE DE SYMÉTRIE DANS UN FLUIDE AU REPOS

Un article synthétisant la plupart des résultats présentés dans ce chapitre est en cours d'évaluation. Il est annexé à ce manuscrit.

5. Conclusions et perspectives générales

5.1. Conclusions

Dans cette étude nous avons considéré l'écoulement autour d'une particule cylindrique en translation ou rotation. Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons d'abord exploré en détails la configuration de translation. Nous avons d'abord considéré le cas où le cylindre est aligné avec la direction de l'écoulement. Nous avons comparé nos résultats numériques à $Re \ll 1$ avec la théorie des corps allongés que nous avons prolongé empiriquement pour qu'elle soit valable pour les χ modérés. Toujours à l'aide de cette théorie et en s'appuyant sur son extension aux régimes faiblement inertiel, nous avons proposé une loi empirique valide pour des Re modérés et des cylindres allongés. En régime inertiel l'écoulement demeure stationnaire et axisymétrique pour toutes les gammes de Re et χ balayées. Il s'est avéré que la longueur de la zone de recirculation observée dans le sillage du cylindre évolue en \sqrt{Re} . Pour des Re assez grands et en fonction de χ , une deuxième zone de recirculation apparaît sur la surface latérale du cylindre. Cette recirculation tend à réduire les contraintes visqueuses appliquées sur cette face. Par ailleurs, nous avons proposé des modèles des contributions visqueuses et de pression à la force de traînée sur chaque face du cylindre. Il s'est avéré que la force de pression est quasi-indépendante du rapport de forme à partir d'un certain nombre de Reynolds de l'ordre de la centaine. La loi empirique de la traînée totale est en bon accord avec les résultats numériques.

Dans la suite de notre étude sur le cylindre en translation, nous avons incliné le cylindre par rapport à la direction de l'écoulement d'un angle limité à $\theta = 30^\circ$. Nos résultats numériques pour la force parallèle à $Re \ll 1$ sont en bon accord avec la loi de Stokes basée sur les prédictions de la théorie des corps allongés. Cependant pour des Re modérés, les effets inertiels sont importants et il s'est avéré que la loi de Stokes n'est plus valable. Pour la force perpendiculaire, l'influence des effets inertiels est observé même à $Re \ll 1$ pour les grands rapports de forme, d'où la non validité de la loi de Stokes basé sur la théorie des corps allongés pour $\chi \geq 10$. En régime inertiel, Une symétrie plane contenant l'axe du cylindre est toujours préservée dans le sillage. L'écoulement reste stationnaire pour toute inclinaison et pour $Re \leq 330$. Dans ce régime stationnaire une seule structure tourbillonnaire est observée : une paire de tourbillons contra-

rotatifs. Pour $Re \geq 330$, deux types de lâchers périodiques de tourbillons "épingle à cheveux" sont observés en fonction de l'angle d'inclinaison. Une seule fréquence de fluctuation apparaît dans tous les cas instationnaires sauf dans le cas ($\chi = 7, \theta = 30^\circ, Re = 400$) où une basse fréquence s'ajoute pour envelopper les fluctuations de haute fréquence. Quelque soit le mode des lâchers observés, l'amplitude des fluctuations de la force de portance est plus importante que celle de la force de traînée comme pour le cas de la sphère. Nous avons aussi constaté que l'amplitude des fluctuations décroît avec le rapport de forme. Nous avons proposé des lois de forces/moment de la même manière que dans le cas du cylindre aligné. En régime inertiel, il s'est avéré que la force perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre suit une variation en $\sin \theta$ comme à bas nombre de Reynolds. Il s'est avéré que cette force évolue en $1/\sqrt{Re}$, suggérant qu'elle est impactée par les effets de la couche limite. En augmentant le nombre de Reynolds, elle tend vers une indépendance en χ . Pour la force parallèle au cylindre, une forte dépendance en χ est constatée. Le moment quant à lui est presque indépendant du rapport de forme à partir de $\chi \geq 5$, mais il est très sensible pour les petits rapports de forme. L'effet de cette sensibilité est mis en évidence pour $\chi = 3$ quand le nombre de Reynolds dépasse 200. En décomposant les différentes contributions visqueuses et de pression sur les trois faces du cylindre, nous avons proposé un modèle empirique qui fournit une prédiction correcte du moment et de la force parallèle.

En ce qui concerne la deuxième configuration, à savoir la rotation forcée d'un cylindre de longueur finie dans un fluide au repos, nous avons constaté qu'en régime de Stokes, un très bon accord a été observé entre les résultats de la théorie des corps allongés et les résultats numériques pour $\chi \geq 6$. Une modification de la loi théorique a été proposée pour obtenir également de bons résultats pour les cylindres courts. En régime inertiel un seul type de structure tourbillonnaire a été observé dans toute la plage de Re et χ étudiée. Le sillage correspondant est constitué de deux paires de tourbillons contra-rotatifs possédant un plan de symétrie et une symétrie par rotation d'angle π pour tous les nombres de Reynolds. Une influence modérée du nombre de Reynolds et du rapport de forme sur les vitesses et la vorticité dans la zone perturbée a été mise en évidence. Une description détaillée des forces et moments exercés sur chaque face du cylindre a été fournie dans la Section 3. Il s'est avéré que le fluide résiste à la rotation du cylindre essentiellement via les contributions visqueuses et de pression sur la surface latérale. Une loi empirique d'évolution du moment hydrodynamique en fonction de χ et Re a été proposée en se basant sur les différentes contributions issues des trois faces du cylindre. Cette loi est en très bon accord avec nos résultats numériques avec un écart relatif de moins de 4% sur toute la plage de paramètre explorée.

5.2. Perspectives

Dans le cas du cylindre incliné, dans la gamme des paramètres de contrôle balayée, notre étude reste incomplète. Toujours par la voie numérique, il serait pertinent d'explorer la plage $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, où le régime instationnaire est atteint pour des faibles Re et la zone de séparation de l'écoulement est plus importante. Il serait tout aussi intéressant de se pencher sur d'autres formes géométriques (ellipsoïdes, cylindre courbé...) pour étendre l'investigation à l'impact de la forme de l'objet sur les instabilités de sillage, et les efforts. En effet dans le procédé d'intérêt, les particules ne sont pas axisymétriques et sont souvent courbées. Cette courbure peut avoir un impact sur le sillage et donc sur les efforts. Par conséquence, un cylindre courbé n'aura pas forcément la même position de préférence par rapport à l'écoulement incident.

Dans toute l'étude nous avons fait l'hypothèse d'une particule cylindrique non poreuse, ce qui n'est pas le cas des catalyseurs utilisés dans les lits fluidisés. Dans ce cas, il faudrait changer la condition de non glissement imposée sur la surface du cylindre pour prendre en compte sa porosité. Son impact sur les efforts reste une question ouverte. Comme nous avons aussi étudié la rotation pure d'un cylindre dans un fluide au repos, il serait important de le combiner avec le mouvement de translation pour une seule particule cylindrique en régime inertiel et d'examiner l'effet de cette combinaison de mouvement sur le sillage et le comparer avec les sillages observés dans chaque mouvement isolé. Dans ce cas, nous pourrions examiner l'impact de la rotation forcée sur les forces de traînée et de portance.

Toujours dans la même perspective d'étudier une seule particule isolée, il est intéressant de simuler la chute libre d'un cylindre à différents rapports de forme avec un rapport de masse volumique particule/fluide ρ_c/ρ_f balayant la gamme 1 – 4 qui répond aux données du procédé H-OIL utilisé à l'IFPEN, en analogie avec les travaux expérimentaux de [Toupoint et al. \(2019\)](#). La deuxième étape, serait de fixer certains degrés de liberté cinématiques du cylindre puis regarder l'évolution de sa trajectoire et des bifurcations. Ceci permettra aussi d'identifier les forces/couples mises en jeux. Pour mener à bien la compréhension du procédé H-Oil, il sera nécessaire d'élargir le champ d'investigation en simulant un ensemble de particules cylindriques dans un milieu confiné. Dans ce cas, il faut rajouter les modèles de forces/moments proposés pour une seule particule dans les équations de quantité de mouvement. Ceci a fait l'objet d'étude de [Derksen \(2019\)](#) qui ont pris en compte aussi les collisions entre les particules solides. Ceux-ci ont un impact sur les trajectoires des particules et donc sur l'hydrodynamique de l'écoulement autour. Dans ce cas, il faut implémenter des modèles de force/moment dû aux collisions particule-particule. Les travaux de [Morioka et Nakajima \(1987\)](#) ont aussi pris en compte les collisions entre particules sphériques mais pas l'interaction entre les particules.

Cette dernière a été prise en compte dans les travaux de [Derevich *et al.* \(1989\)](#) ainsi que dans les travaux de [Simonin \(1991\)](#).

A. Annexe A

Hydrodynamic torque on a steadily rotating slender cylinder

Jean-Lou Pierson, Mohammed Kharrouba, Jacques Magnaudet

(Dated: March 21, 2021)

ABSTRACT

Using fully-resolved simulations, we investigate the torque experienced by a finite-length circular cylinder rotating steadily perpendicularly to its symmetry axis. The aspect ratio χ , *i.e.* the ratio of the length of the cylinder to its diameter, is varied from 1 to 15. In the creeping-flow regime, we employ the slender-body theory to derive the expression of the torque up to order 4 with respect to the small parameter $1/\ln(2\chi)$. Numerical results agree well with the corresponding predictions for $\chi \gtrsim 3$. We introduce an *ad hoc* modification in the theoretical prediction to fit the numerical results obtained with shorter cylinders, and a second modification to account for the increase of the torque resulting from finite inertial effects. In strongly inertial regimes, a prominent wake pattern made of two pairs of counter-rotating vortices takes place. Nevertheless the flow remains stationary and exhibits two distinct symmetries, one of which implies that the contributions to the torque arising from the two cylinder ends are identical. We build separate empirical formulas for the contributions of pressure and viscous stress to the torque provided by the lateral surface and the cylinder ends. We show that, in each contribution, the dominant scaling law may be inferred from simple physical arguments. This approach eventually results in an empirical formula for the rotation-induced torque valid throughout the range of inertial regimes and aspect ratios considered in the simulations.

I. INTRODUCTION

Fibers and cylindrical rod-like particles are involved in numerous industrial processes such as paper making and food processing. In the chemical engineering industry, cylindrical pellets are used for instance for biomass extraction and oil refinement. Ice crystals growing and sedimenting in clouds also exhibit slender shapes and may be considered, to a first approximation, as cylindrical rods. Hydrodynamic forces and torques acting on cylindrical particles generally depend critically on their orientation with respect to the relative incoming flow, which greatly complicates their prediction. For instance, in the creeping-flow approximation, the hydrodynamic force acting on a long isolated fiber moving broadside on is known to be twice as large as the force it experiences when moving along its axis [1]. This anisotropic behavior may have critical consequences in industrial processes in which pressure losses have to be reduced to a minimum. It is thus of primary importance to predict accurately the instantaneous orientation of the particles, and consequently the hydrodynamic torque acting on them. In dilute flow regimes, the time rate-of-change of the angular velocity is in most cases sufficiently small for the rotation-induced torque to balance the inertial torque due to the body inclination [2], possibly supplemented with a shear-induced inertial torque [3, 4]. This quasi-steady assumption [5] has proven accurate for predicting the motion of fibers settling in a vortical flow [6] or in a fluid at rest at infinity [7]. However, a proper prediction of the angular velocity, hence of the instantaneous body orientation, under quite general conditions requires the influence of finite-length and inertial effects on the rotation-induced torque to be accurately quantified. With the aim of contributing to the modeling of this aspect for dilute suspensions, the present paper focuses on the rotation-induced torque acting on an isolated finite-length circular cylinder, from creeping-flow conditions to strongly inertial regimes. Indeed, the size of fibers encountered in applications covers a broad range corresponding to widely different flow regimes. While those employed in paper making industry have diameters typically in the range $15 - 30 \mu\text{m}$ and are a few millimeters long, typical rod-like catalysts involved in fluidized beds have diameters of roughly 1 mm and are 5 to 10 mm long. In the former case, the Reynolds number based on the particle diameter is usually small, but the length-to-diameter aspect ratio is large. Conversely, flow conditions relevant to rod-like catalysts usually correspond to moderate-to-large diameter-based Reynolds numbers and to aspect ratios of a few units.

The torque on a rotating sphere was investigated numerically by Dennis et al. [8]. The results were found to agree well with Kirchhoff's solution [9] at low Reynolds number. At large Reynolds number, the solutions were found to tend toward the predictions of boundary layer theory. An empirical law for the torque, bridging the two limits, was proposed. Although a large body of literature is available regarding the forces experienced by non-spherical particles (see for instance [10] for a review), much less is known regarding the rotation-induced torque. In the creeping-flow limit, Batchelor [1] made use of the slender-body theory to evaluate the force and torque acting on long cylindrical bodies. In the opposite limit of nearly-inviscid flows, Kry and List [11, 12] considered the torques experienced by rotating oblate spheroids. They provided a range of applicability of the quasi-steady approximation for the aerodynamic torque. In particular, they showed that a spinning motion about the spheroid minor axis modifies the boundary layer but does not affect significantly the pressure distribution past the body.

In this work, we determine numerically the torque experienced by a steadily rotating circular cylinder of finite length, from creeping-flow conditions to strongly inertial regimes. We briefly present the problem and the computational strategy in Sec. II. In Sec. III, we first compute the torque in the low-Reynolds regime and compare the numerical results with the prediction of the slender-body approximation, which we extend to fourth order in appendix A. Then we examine the influence of finite inertial effects and incorporate an empirical correction in the creeping-flow formula to take this influence into account. Moderate-to-large Reynolds number flow conditions are examined in Sec. IV. In the spirit of our recent investigation on the loads acting on an inclined translating cylinder [13], practical estimates for the torque acting on the body are derived from the simulations by considering separately the contribution of viscous stresses and pressure on each part of the body, *i.e.* the lateral surface and the two flat ends. We summarize our results in Sec. V and discuss their implications with respect to the variations of the body rotation rate with the aspect ratio and the Reynolds number.

II. PROBLEM DEFINITION AND NUMERICAL APPROACH

We consider the flow induced by a circular cylinder of length L and diameter D rotating about an axis perpendicular to its symmetry axis and passing through its center of inertia. The fluid is Newtonian, with density ρ and dynamic viscosity μ , and is at rest at infinity. The problem depends on two dimensionless parameters, the aspect ratio $\chi = L/D$ and the Reynolds number which we define as $Re = \rho\Omega LD/(2\mu)$. This definition assumes that D is the relevant length scale of the flow, while the characteristic velocity U is assumed to be $\Omega L/2$. In what follows, we investigate the flow and torque induced by the cylinder rotation in the range $0.05 \leq Re \leq 240$ and $1 \leq \chi \leq 15$. In inertia-dominated regimes, we only consider aspect ratios in the range $2 \leq \chi \leq 8$ to reduce the computational cost.

The computational strategy is based on the formulation introduced by Mougin and Magnaudet [14] and we refer to the original article for details. In short, the Navier-Stokes equations are solved for the *absolute* velocity field \mathbf{u} (the one measured by a fixed observer) using a coordinate system rotating and possibly translating with the body. Hence, the body is fixed and the fluid rotates about it. Note that this formulation differs from the classical one involving the Coriolis pseudo-force, since the latter makes use of the same coordinate system but considers the *relative* velocity field. In the present approach, the fluid is at rest at infinity and obeys the no-slip condition $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ at the cylinder surface, \mathbf{x} denoting the local position from the body centroid.

The computational domain is a large cylinder with the same axis as the body. Its diameter is equal to its length. The discretization of the fluid domain is mostly similar to that used by Kharrouba et al. [13] but the configuration of interest here introduces some specificities. For low-to-moderate Reynolds numbers, the grid is uniform throughout the fluid region extending up to $0.5D$ from the body surface, with cell sizes ranging from $D/16$ to $D/20$ depending on Re . Beyond this region, the cell size increases with the distance to the body following a geometric law with a common ratio close to 1.07. 32 cells are uniformly distributed in the azimuthal direction. The length and diameter of the domain range from $60D$ for $\chi = 1$ and 2 to $215D$ for $\chi = 10$ and 15. Such large dimensions are required due to the slow decrease of the disturbance induced by the body rotation. On the outer surface of the domain, the normal component of \mathbf{u} is assumed to be zero, together with the normal derivative of the tangential components. We select this ‘free-slip’ condition rather than a non-reflecting outlet condition because the tiny remaining velocity disturbance has an inward component on some parts of the outer surface, which could create numerical instabilities. In the inertia-dominated regime, detailed tests showed that the boundary layer, whose thickness is estimated to be $\delta \sim D/Re^{1/2}$ on the body ends and on the part of the lateral surface close to them, is accurately captured with 6 cells. Hence, the cell size in the fluid region extending up to $0.5D$ from the body surface is set to $\delta/6$. 64 cells are uniformly distributed in the azimuthal direction. The domain size is set to $L + 30D$, *i.e.* the outer boundary is located $15D$ apart from the cylinder ends. Since the velocity disturbance decays much faster with the distance to the body than in the low-to-moderate Re regime, a non-reflecting boundary condition [15] is used on the outer boundary.

III. FROM THE CREEPING-FLOW REGIME TO MODERATE REYNOLDS NUMBERS

For $Re = 0$, the slender-body theory provides a convenient framework to estimate the torque on a rotating finite-length cylinder as long as the aspect ratio is much larger than unity. Batchelor [1] carried out the third-order expansion with respect to the small parameter $\epsilon = 1/\ln(2\chi)$ for this case, computing the corresponding coefficients numerically. In appendix A we derive these coefficients analytically up to order 4, based on the iterative technique developed by Keller and Rubinow [16].

The corresponding results are displayed in Fig. 1. The torque is made dimensionless by dividing it by its counterpart on a rotating sphere with the same volume, namely $T_s = -\pi\mu\Omega\mathcal{D}^3$, with $\mathcal{D} = (\frac{3}{2}\chi)^{1/3}D$. The torque on a rotating cylinder is larger than that on the equivalent sphere for all aspect ratios $\chi \gtrsim 1$. Indeed, at leading order, the ratio of the two torques varies as $\chi^2/\log(2\chi)$. Not surprisingly, the first and second-order approximations do not match the numerical results well, even for large aspect ratios. The third-order approximation provides a better estimate but still under-predicts the actual torque. A significantly better

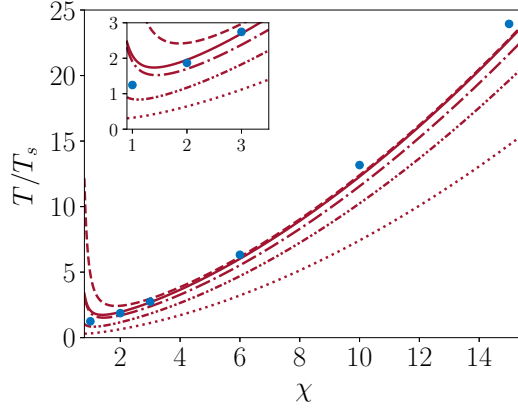


FIG. 1: Torque on a rotating finite-length cylinder, normalized by the torque on a rotating sphere with the same volume. Dotted, dash-dotted-dotted, dash-dotted and dashed lines: predictions of 1st-, 2nd-, 3rd- and 4th-order slender-body approximations, respectively; solid line: semiempirical formula (1), •: numerical results for $Re = 0.05$.

agreement is obtained with the fourth-order approximation for $\chi \gtrsim 3$. All approximations diverge as $\chi \rightarrow 1/2$, making the agreement deteriorate for $\chi \lesssim 3$. However, the third-order approximation is still accurate in the range $1.5 \lesssim \chi \lesssim 3$. Making use of these observations, we introduce an *ad hoc* modification of the original expansion. That is, we multiply the fourth-order term by a function of χ that quickly tends towards unity as χ increases and towards zero when $\chi \rightarrow 1/2$, and varies in such a way that the behavior of the third-order expansion is recovered in the range $2 \lesssim \chi \lesssim 3$. The full expression reads

$$T = -\frac{\pi\mu\Omega L^3}{3} \left[\epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{11}{6} - \ln 2 \right) + \epsilon^3 \left(\frac{161}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{3} \ln 2 + (\ln 2)^2 \right) + \epsilon^4 \left(1 - \frac{1}{(2\chi)^{1.2}} \right)^5 \left(-\frac{5}{4} \zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2} \ln^2(2) - \frac{161}{12} \ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{8} \ln(4) \right) \right) \right]. \quad (1)$$

The formula (1) agrees well with the numerical results for $\chi \gtrsim 2$. It slightly deviates from the numerical result for $\chi \geq 10$. This is not unlikely since the Reynolds number based on L instead of D is of $\mathcal{O}(1)$ in this case, suggesting that inertial effects are already significant. The inset in Fig. 1 indicates that the normalized torque on a cylinder with $\chi = 1$ is approximately 1.25, *i.e.* the torque is larger than that on the equivalent sphere, $|T_s| \approx 1.145\pi\mu D^3\Omega$. In appendix B, we show how bounds for the torque may be derived from the minimum dissipation theorem. For $\chi = 1$, these predictions indicate that the torque is such that $\pi\mu D^3\Omega \leq |T| \leq 2^{3/2}\pi\mu D^3\Omega$. The numerical result obviously stands in the allowed interval.

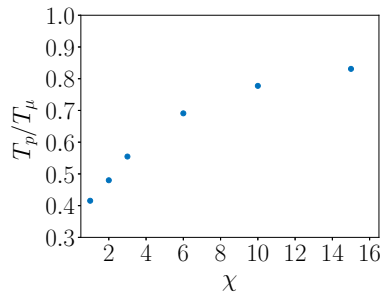


FIG. 2: Ratio of the pressure-to-shear stress contributions to the torque for $Re = 0.05$.

Figure 2 shows how the ratio T_p/T_μ between the pressure and shear stress contributions to the torque vary with the aspect ratio. The former contribution is observed to be smaller than the latter whatever χ . Keeping in mind that T_p would be zero for a sphere, it is no surprise that T_p/T_μ increases with χ . This ratio is slightly larger than 0.8 for $\chi = 15$ and the observed variation suggests that it becomes independent of χ and of $\mathcal{O}(1)$ for long enough cylinders.

Figure 3 displays the increase of the normalized torque as function of Re for three aspect ratios and Reynolds numbers up to 10. In the range $0.05 \leq Re \leq 1$, the torque is seen to vary by less than 5% for $\chi = 3$, while it varies by more than 10% for $\chi = 10$. For $Re = 10$, the torque on the longest cylinder has doubled with respect to its value in the creeping flow regime, while it has only increased by nearly 40% for $\chi = 3$. That the relative contribution of inertial effects to the torque increases with the aspect ratio is no surprise. Indeed, the

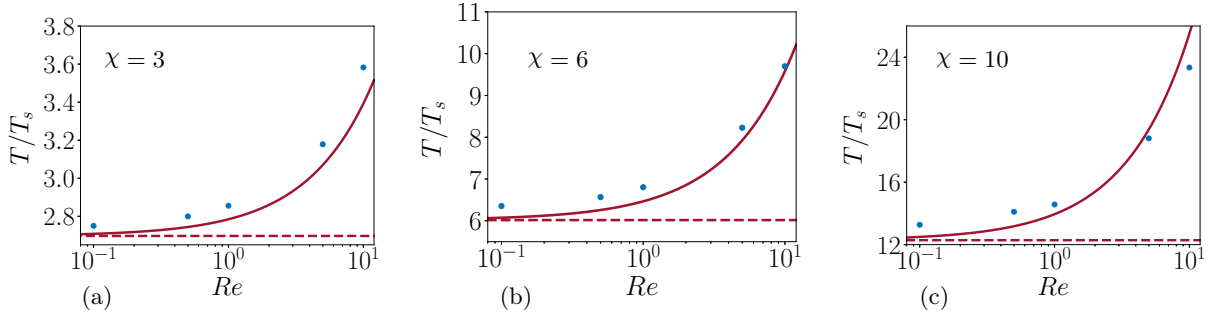


FIG. 3: Normalized torque as a function of the Reynolds number in the range $0.1 \leq Re \leq 10$. \bullet : numerical results; dashed line: creeping-flow prediction (1); solid line: semiempirical formula (2). The slight difference between numerical results and predictions of (1) for $Re \ll 1$ is already present in figure 1 but is magnified here, owing to the chosen origin of the vertical axis.

relevant characteristic length scale of the flow is the lever arm $L/2 = \chi D/2$ rather than D , so that the relevant ratio of inertial to viscous effects is $\frac{\chi}{2}Re$. Finite inertial effects acting on a slender body inclined with respect to a uniform incoming flow were considered by Khayat and Cox [2], using the method of matched asymptotic expansions. Their predictions, in which inertial corrections affect the $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ -terms of the expansion, quantify the inertia-induced increase of the drag and lift forces. In the case of a cylinder (more generally a body with a straight centerline), these predictions also reveal the existence of a nonzero inertial torque which tends to rotate the body broadside on with respect to the incoming flow. To the best of our knowledge, finite-inertia effects have not been considered for a slender body rotating in a fluid at rest at infinity. Adapting the approach of [2] to this configuration is beyond the scope of the present work. Instead, we only attempted to use the numerical results to extend the formula (1) empirically to $\mathcal{O}(1)$ -Reynolds numbers by suitably altering the pre-factor of the $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ -term. Based on the numerical findings and the above remarks, we modified (1) in the form

$$T = \frac{-\pi\mu\Omega L^3}{3} \left[\epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{11}{6} - \ln 2 + f(\chi, Re) \right) + \epsilon^3 \left(\frac{161}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{3} \ln 2 + (\ln 2)^2 \right) + \epsilon^4 \left(1 - \frac{1}{(2\chi)^{1.2}} \right)^5 \left(-\frac{5}{4}\zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2} \ln^2(2) - \frac{161}{12} \ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{4} \ln 2 \right) \right) \right], \quad (2)$$

with $f(\chi, Re) = 0.0337\chi^{1.3}Re^{0.9}$. Only the second-order term has been modified since, according to Fig. 3, this change appears to be sufficient to capture most of the finite-Re variations of the torque up to $Re = 10$.

IV. FLOW STRUCTURE AND TORQUE IN INERTIA-DOMINATED REGIMES

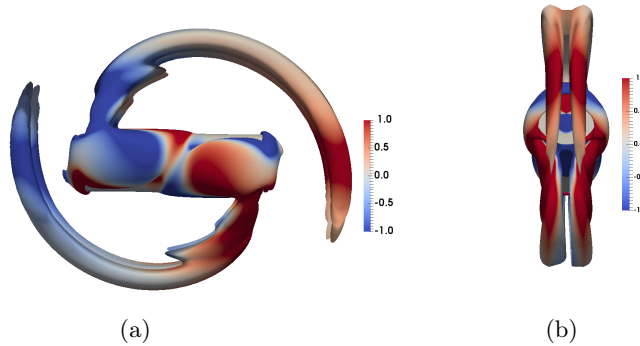


FIG. 4: Wake past a rotating cylinder with $\chi = 3$ for $Re = 220$. (a): side view from a fixed z -plane (see Fig. 5 for the definition of the coordinate system); (b): front view from a fixed x -plane. The wake is visualized using the Q -criterion [17]. The 0.001 iso-surface of Q is colored with the magnitude of the normalized transverse vorticity ω_z/Ω .

Inertia-dominated regimes with Reynolds numbers beyond those considered before are characterized by the presence of a prominent wake. As Fig. 4 shows, two pairs of counter-rotating vortices take place. Each pair

emanates from one end of the cylinder and bends downstream under the effect of the flow rotation, resulting in helical vortices similar to those observed past rotating blades. Since the strength of the vorticity generated at the cylinder surface increases with Re , so does the length of the vortices. No unsteadiness, *i. e.* no vortex shedding, was observed throughout the whole range of Reynolds number considered here ($Re \leq 240$). In this regime, the wake exhibits two distinct symmetries. As Fig. 4(b) reveals, the plane perpendicular to the rotation axis and passing through the cylinder centroid is a symmetry plane. This planar symmetry, combined with the flow steadiness, implies that all force components are zero at any instant of time and that the torque is collinear with the rotation axis.

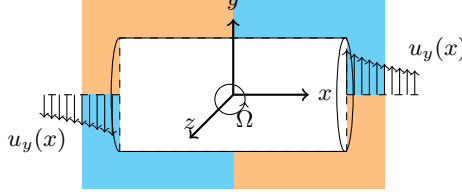


FIG. 5: Sketch of the flow configuration near the rotating cylinder. Colors help identify the flow symmetries.

Figure 4(a) reveals a second symmetry resulting from the combination of two mirror symmetries. One is with respect to the plane containing both the rotation axis and the cylinder symmetry axis (defined as the z - and x -axes in Fig. 5, respectively). The other is with respect to the plane orthogonal to the previous plane and containing again the rotation axis ((y, z) -plane in Fig. 5). This symmetry is illustrated with colored areas in Fig. 5. For instance, the pressure at a given point in the upper half of the right end (blue area) is identical to the pressure at the mirror point of the left end (blue area again). Since the cross product $\mathbf{x} \times \mathbf{n}$ (with \mathbf{n} the unit normal to the cylinder pointing into the fluid) is also the same at the two locations, it turns out that the pressure contributions to the torque provided by the two ends are identical. The x -variation of the tangential velocity u_y in the vicinity of both ends is schematized in Fig. 5. As this sketch suggests, the same property holds true for the shear stress contribution provided by both ends.

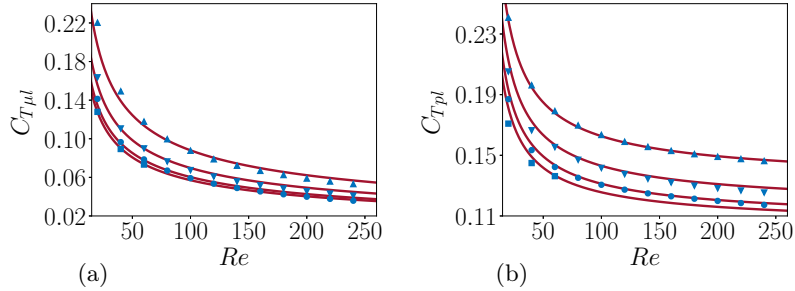


FIG. 6: Contributions to the torque arising from the lateral surface as a function of Re . (a): viscous (shear stress) contribution; (b): pressure contribution. \blacktriangle : $\chi = 2$, \blacktriangledown : $\chi = 3$, \bullet : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$. Solid line: empirical fits (3) and (4).

Figure 6 displays the contributions to the torque arising from the lateral surface. For $\chi = 8$, computations were only carried out up to $Re = 60$, owing to the cost associated with the large grids required to capture the flow details at higher Re . From now on, we characterize the torque through the coefficient C_T obtained by normalizing T with the reference torque $\frac{1}{8}\rho\Omega^2 L^4 D$, since the characteristic velocity is $\Omega L/2$ and the characteristic surface is LD . For each aspect ratio, the viscous contribution (Fig. 6(a)) decreases approximatively as $Re^{-1/2}$, indicating that the magnitude of the shear stress is dictated by the boundary layer thickness. This contribution is also seen to depend only weakly on χ as soon as $\chi \gtrsim 5$. Hence, the corresponding coefficient can be fitted with the simple expression

$$C_{T\mu l} = (1.32\chi^{-2} + 0.55)Re^{-1/2}. \quad (3)$$

The pressure contribution (Fig. 6(b)) decreases as χ or Re increases, gradually tending toward a constant value for large Reynolds numbers whatever χ . Numerical data are properly fitted with the three-term correlation

$$C_{Tpl} = 1.21\chi^{-0.23}Re^{-0.75} + 0.12\chi^{-2} + 0.1. \quad (4)$$

This fit suggests that the pressure contribution to the torque tends toward 0.1 for large enough Reynolds numbers and infinitely long cylinders. Although a torque coefficient independent of both χ and Re is to be

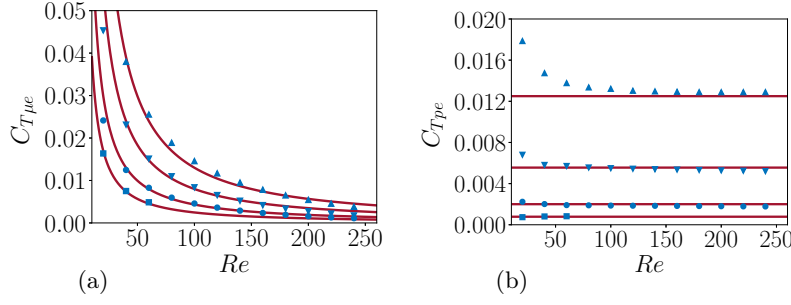


FIG. 7: Contributions to the torque arising from each of the cylinder ends as a function of Re . (a): viscous (shear stress) contribution; (b): pressure contribution. \blacktriangle : $\chi = 2$, \blacktriangledown : $\chi = 3$, \bullet : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$. Solid line: empirical fits (5) and (6).

expected in this limit, it must be kept in mind that only the steady regime is considered here, so that (4) may not be valid in the unsteady regimes that take place for sufficiently large Re .

Figure 7 displays the contribution of each cylinder end to the torque. The viscous contribution (Fig. 7(a)) decreases strongly as χ or Re increases. It is adequately fitted with the simple formula

$$C_{T\mu e} = 7.5\chi^{-1.2}Re^{-1.2}. \quad (5)$$

It is worth noting that the negative Re -exponent is significantly higher than that provided by the boundary layer theory. The reason is that the flow is massively separated in the end regions, and the typical length scale of the corresponding recirculation is D . For this reason, the magnitude of the shear stress on the cylinder ends is governed by the cylinder diameter, not by the boundary layer thickness. This scaling yields viscous stresses of $\mathcal{O}(\mu U/D)$, hence contributions to the torque of $\mathcal{O}(\mu ULD)$, which results in $C_{T\mu e} \sim Re^{-1}\chi^{-1}$, close to the behavior synthesized by (5).

As Fig. 7(b) reveals, the pressure contribution to the torque arising from the cylinder ends does not vary significantly with the Reynolds number in the range of interest here, except for the shortest cylinder for which some decrease is observed for $Re \leq 80$. Compared to the pressure contribution provided by the lateral surface, C_{Tpe} is one order of magnitude smaller for $\chi = 2$ and approximately 50 times smaller for $\chi = 5$. This small contribution is seen to decrease strongly with the aspect ratio. This decrease may readily be predicted, assuming that the pressure on the ends scales as $\rho U^2 \sim \rho \Omega^2 L^2$. Since the end area is of $\mathcal{O}(D^2)$ and the magnitude of $\mathbf{x} \times \mathbf{n}$ is of $\mathcal{O}(D)$ there, the pressure contribution to the torque scales as $\rho \Omega^2 L^2 D^3$, which yields $C_{Tpe} \sim \chi^{-2}$. Indeed, the behaviors reported in Fig. 7(b) are adequately fitted by the simple expression

$$C_{Tpe} = 0.05\chi^{-2}. \quad (6)$$

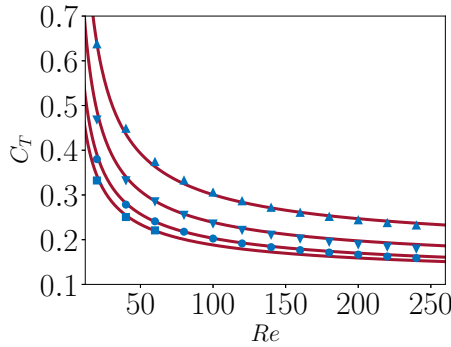


FIG. 8: Torque coefficient as a function of Re for cylinders with various aspect ratios. \blacktriangle : $\chi = 2$, \blacktriangledown : $\chi = 3$, \bullet : $\chi = 5$, \blacksquare : $\chi = 8$. Solid line: empirical fit (7).

The total torque coefficient C_T is eventually obtained by summing all the contributions fitted in (3)-(6), keeping in mind that those of (5) and (6) have to be counted twice. This yields

$$C_T(\chi, Re) = 15\chi^{-1.2}Re^{-1.2} + 1.21\chi^{-0.23}Re^{-0.75} + (1.32\chi^{-2} + 0.55)Re^{-1/2} + 0.22\chi^{-2} + 0.1. \quad (7)$$

As Fig. 8 shows, this empirical fit matches all numerical results well.

V. DISCUSSION

In this work, we used fully-resolved simulations to obtain approximate laws for the torque acting on a slender circular cylinder rotating about an axis passing through its centroid and perpendicular to its symmetry axis. For cylinders with an aspect ratio larger than 3, we found the creeping-flow prediction based on the slender-body theory to agree well with numerical data, provided the expansion with respect to the small parameter $1/\ln(2\chi)$ is carried out up to fourth order. We empirically modified the fourth-order term which we derived analytically, in such a way that the modified formula is valid down to $\chi \approx 2$. We carried out a series of runs in the range $0.1 \leq \text{Re} \leq 10$ to quantify finite-inertia effects. As is customary with slender bodies, numerical results revealed that the larger the aspect ratio the stronger the inertial increase of the torque for a given Re . Since no theoretical prediction is available for low-but-finite inertial effects in the configuration considered here, we merely introduced an empirical modification in the second-order term of the low- Re prediction to account for these effects. The modified formula was found to fit the numerical data well up to $\text{Re} \approx 10$ whatever the aspect ratio. Then we considered higher Reynolds numbers, up to $\text{Re} = 240$. Numerical results revealed that the flow remains stationary throughout this range and preserves a planar symmetry with respect to the plane perpendicular to the rotation axis and passing through the body centroid. The flow exhibits a second symmetry, resulting from the combination of two mirror symmetries with respect to two mutually orthogonal planes. Because of this symmetry, the two cylinder ends provide identical contributions to the torque. We used numerical data to establish separate approximate fits for the contributions resulting from pressure and viscous effects on each part of the body surface, and provided simple physical arguments in support of the corresponding scaling laws. From a practical standpoint, the main outcomes of this investigation are formulas (1), (2) and (7) which accurately approach the rotation-induced torque from creeping-flow conditions up to $\text{Re} \approx 250$ for all aspect ratios larger than 2.

These empirical laws allow the rotation rate of sedimenting cylindrical rod-like particles and fibers to be predicted in the various flow regimes. Consider first the low-but-finite Reynolds number regime. There, the orientation-induced inertial torque T_o acting on a long cylinder translating with velocity U in a fluid at rest is known to be of $\mathcal{O}(\mu U L^2 \chi \text{Re}_u / (\ln \chi)^2)$ [2], with Re_u the Reynolds number based on the body diameter and velocity U . In contrast, according to (1), the rotation-induced torque scales as $T \sim \mu \Omega L^3 / \ln \chi$, so that the ratio T_o/T is of $\mathcal{O}(\frac{U}{\Omega L} \chi \text{Re}_u / \ln \chi)$. When a rod-like particle with a uniform density distribution settles under the effect of gravity, its angular velocity must be such that T and T_o balance each other, assuming that conditions for a quasi-steady evolution are fulfilled (see [5, 18] for a discussion on this aspect). This quasi-steady balance implies

$$\frac{\Omega D}{U} \sim \text{Re}_u (\ln \chi)^{-1}. \quad (8)$$

Similar to the approach followed in the previous section, the numerical results obtained in [13] for T_o in inertia-dominated regimes were synthesized in the form of an empirical fit. Considering that the cylinder axis makes an angle θ with the incoming velocity (only inclinations up to 30° were considered in [13]), and writing T_o in the form $T_o(\chi \gg 1, \theta, \text{Re}_u) \approx C_{T_o}(\text{Re}_u) \rho U^2 L^2 D \sin 2\theta$, these results indicate that in the limit of large aspect ratios one has $C_{T_o} \approx 0.69 \chi^{-0.47} \text{Re}_u^{-0.35}$. In the same limit, (7) reduces to $C_T \approx 0.1 + 0.55 \text{Re}^{-1/2}$. Equating the two torques and considering orientations such that $\sin 2\theta \neq 0$ yields for sufficiently large Re

$$\frac{\Omega D}{U} \sim \text{Re}_u^{-0.175} \chi^{-1.235}. \quad (9)$$

However, the $\text{Re}^{-1/2}$ -correction in (7) remains dominant up to $\text{Re} \approx 30$. In the intermediate range, say $1 \lesssim \text{Re} \lesssim 20$, one then has

$$\frac{\Omega D}{U} \sim \text{Re}_u^{0.1} \chi^{-1.31}. \quad (10)$$

Comparing the above three predictions gives insight into the way the relative rotation rate $\Omega D/U$ varies with the translation Reynolds number and the body aspect ratio. Starting from the linear growth indicated by (8) for low-but-finite Reynolds numbers, (10) predicts that the growth with Re_u slows down drastically for moderately inertial conditions, until $\Omega D/U$ eventually slowly decreases as $\text{Re}_u^{-0.175}$ under strongly inertial conditions. All predictions indicate that the larger the aspect ratio the slower the body rotation. However inertial effects sharpen the corresponding slowing down, since the $1/\ln \chi$ -variation typical of finite-slenderness effects at low Re_u , is replaced by a sharper χ^{-n} -variation with $n \gtrsim 1$ for $\text{Re}_u > 1$.

Throughout this work, we deliberately disregarded unsteady effects which are obviously significant, if not dominant, during collision processes [19]. In such situations, the rotation-induced torque may be much larger than T_o , the torque balance being then satisfied thanks to the time rate-of-change of the particle rotation rate. The collision frequency increases with the particle concentration, making these transient effects become increasingly important as denser suspensions are concerned. In such situations, it is also desirable to know the relaxation time beyond which the steady approximate formulas established here become valid again. However,

the history force on a rotating slender body is not known in closed form in the Stokes regime. Similarly, in the inviscid limit, the inertia-induced (or added-mass) torque is not known in closed form, although approximate formulas have been proposed [20]. This lack of theoretical guides in the asymptotic regimes makes the development of approximate predictions for such unsteady situations challenging. However, given their practical relevance, we plan to consider these transient effects in future work.

ACKNOWLEDGMENTS

Mohammed Kharrouba's fellowship was provided by IFP Energies Nouvelles whose financial support is greatly appreciated. Part of the computations were carried out on the IRENE supercomputer under GENCI grant number A0072B10978.

Appendix A: Slender-body approximation for the rotation-induced torque

The torque on a long rotating body may be obtained through the slender-body theory [1, 16]. By expanding the solution in powers of the small parameter $\epsilon = 1/\ln(2\chi)$, Batchelor [1] determined the rotation-induced torque up to $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. The coefficients of the corresponding expansion were obtained numerically. However, the logarithmic dependence of the loads with respect to χ makes the expansion converge slowly, limiting the accuracy of the predictions for moderate aspect ratios. This is why including higher-order contributions is desirable. In this appendix, we derive the coefficients of the ϵ^n -expansion up to $n = 4$.

The total torque on a cylindrical body of length L may be written as

$$\mathbf{T} = -8\pi\mu L^2 \int_0^1 \mathbf{x} \times \mathbf{f}(x) dx, \quad (\text{A1})$$

where $\mathbf{f}(x)$ is the density of the Stokeslet distribution along the body, \mathbf{x} is the local position (with $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ at the body centroid) and x denotes the arc length. For a body rotating along an axis perpendicular to its symmetry axis (here along z as in the main body of the paper), the previous expression reduces to

$$T = -8\pi\mu L^2 \int_0^1 x f_y(x) dx. \quad (\text{A2})$$

The Stokeslet density f_y was obtained by Keller and Rubinow [16], using a matched asymptotic expansion technique. It may be expressed as

$$f_y(x) = -\frac{\epsilon}{2} \left(U_y(x) + f_y(x) (\ln(4x(1-x)) + 1) + \int_{-x}^{1-x} \frac{f_y(x+t) - f_y(x)}{|t|} dt \right), \quad (\text{A3})$$

with U_y the rotation-induced velocity of the cylinder in the y -direction. For $\chi \gg 1$, $U_y = \Omega L(x - 1/2)$, which indicates that the rotation-induced flow is equivalent to a uniform shear flow of strength Ω centered at the body centroid. As detailed in [16], $f_y(x)$ may be obtained in an iterative way. Setting first $f_y(x) = 0$ on the right-hand side of (A3), the first-order approximation is obtained as $f_y^{(1)}(x) = -\Omega L(x - 1/2)\epsilon/2$. Inserting the first-order solution in the right-hand side of (A3), the second-order correction is readily obtained as

$$f_y^{(2)}(x) = -\frac{\Omega L(x - 1/2)}{2} \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} (\ln(4x(1-x)) - 1) \right), \quad (\text{A4})$$

since the integral term in (A3) reduces to $\int_{-x}^{1-x} \frac{t}{|t|} dt = 1 - 2x$. Following the same procedure, one obtains the third-order correction in the form

$$\begin{aligned} f_y^{(3)}(x) = & -\frac{\Omega L(x - 1/2)}{2} \left\{ \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} (\ln(4x(1-x)) - 1) \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^3}{4} \left[(\ln(4x(1-x)) - 1) (\ln(4x(1-x)) + 1) + \frac{g_y^{(3)}(x)}{x - 1/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

where $g_y^{(3)}(x) = \int_{-x}^{1-x} (h_y^{(3)}(x+t) - h_y^{(3)}(t))/|t| dt$, with $h_y^{(3)}(x) = (x - 1/2) (\ln(4x(1-x)) - 1)$. The latter integral may be evaluated analytically, yielding

$$\begin{aligned} g_y^{(3)}(x) = & -3 + \frac{\pi^2}{6} + 6x - \frac{\pi^2}{3}x + 6\ln 2 - 12x\ln 2 + 2\ln(1-x) - 2x\ln(1-x) - 2x\ln(x) \\ & + \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\text{Li}_2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

where Li_2 is the polylogarithm function with argument 2. At this stage, the present prediction may be compared with the coefficients computed numerically by Batchelor [1]. For this purpose one needs the results

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x-1/2)(\ln(4x(1-x))-1)dx &= -11/36 + \ln 2/6, \\ \int_0^1 x(x-1/2)(\ln(4x(1-x))-1)(\ln(4x(1-x))+1)dx &= (95 - 3\pi^2 + 12\ln 2(-8 + \ln 8))/108 \\ \int_0^1 xg_y^{(3)}(x)dx &= 11/18 - \ln 2/3.\end{aligned}$$

The third-order approximation for the torque is then found to be

$$T^{(3)} = \frac{-\pi\mu\Omega L^3}{3} \left[\epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{11}{6} - \ln 2 \right) + \epsilon^3 \left(\frac{161}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{3} \ln 2 + (\ln 2)^2 \right) \right]. \quad (\text{A7})$$

The numerical evaluation of the second- and third-order terms in (A7) agrees with the results provided in [1]. At next order, the Stokeslet density may be expressed as

$$\begin{aligned}f_y^4(x) &= f_y^{(3)}(x) \\ &+ \frac{\Omega L(x-1/2)}{16} \epsilon^4 \left\{ (\ln(4x(1-x))+1) \left[(\ln(4x(1-x))-1)(\ln(4x(1-x))+1) + \frac{g_y^{(3)}(x)}{x-1/2} \right] + \frac{g_y^{(4)}(x)}{x-1/2} \right\},\end{aligned} \quad (\text{A8})$$

where $g_y^{(4)}(x) = \int_{-x}^{1-x} (h_y^{(4)}(x+t) - h_y^{(4)}(t))/|t|dt$ with $h_y^{(4)}(x) = (x-1/2)(\ln(4x(1-x))-1)(\ln(4x(1-x))+1) + g_y^{(3)}(x)$. Integrating separately each contribution, one obtains

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x-1/2)(\ln(4x(1-x))-1)(\ln(4x(1-x))+1)^2 dx &= \\ \frac{1}{216} (216\zeta(3) - 1042 + 6\ln 4(85 + 3\ln 4(\ln 4 - 7)) + \pi^2(42 - 9\ln 16)), \\ \int_0^1 xg_y^{(3)}(\ln(4x(1-x))+1)dx &= \frac{1}{54} (-9\zeta(3) - 95 + 3\pi^2 - 36\ln^2(2) + 96\ln 2), \\ \int_0^1 xg_y^{(4)}dx &= \frac{1}{54} \left(-161 + 3\pi^2 - 9\ln^2(4) + 54 \left(\ln 4 + \frac{4}{9} \ln 2 \right) \right).\end{aligned}$$

Summing all contributions, the fourth-order approximation is eventually obtained as

$$T^{(4)} = T^{(3)} - \frac{\pi\mu\Omega L^3 \epsilon^4}{3} \left[-\frac{5}{4}\zeta(3) + \frac{1033}{72} - \ln^3(2) + \frac{11}{2} \ln^2(2) - \frac{161}{12} \ln 2 - \pi^2 \left(\frac{11}{24} - \frac{1}{4} \ln 2 \right) \right], \quad (\text{A9})$$

where ζ denotes the Riemann Zeta function. Interestingly, at each order of the expansion one may remark that $\int_0^1 x \int_{-x}^{1-x} (f_y(x+t) - f_y(x))/|t|dt dx = -2 \int_0^1 x f_y(x) dx$. This statement may presumably be proved by mathematical induction, even though we did not attempt to do so.

Appendix B: Minimum dissipation theorem for a rotating cylinder

The minimum dissipation theorem states that in any geometrical configuration, the Stokes solution dissipates less energy than any other solenoidal solution satisfying the same boundary conditions. For a translating and rotating rigid body, the dissipation rate may be related to the rate of work of the force and torque. Therefore [21, 22]

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} \leq \Phi^*, \quad (\text{B1})$$

where \mathbf{F} and \mathbf{T} are the force and torque acting on the body moving at velocity \mathbf{U} and rotating with angular velocity $\mathbf{\Omega}$, and Φ^* is the dissipation rate of any other solenoidal velocity field \mathbf{u}^* obeying the same boundary conditions. This theorem has been used successfully to estimate bounds for the drag acting on translating bodies [21]. The corollary for rotating bodies directly follows from (B1). Assuming that a rigid body bounded by a surface \mathcal{S}_i is immersed in a body of fluid bounded externally by a surface \mathcal{S}_o , (B1) implies that the torque on \mathcal{S}_i is smaller than that on \mathcal{S}_o . The proof of this statement is similar to the one provided in [21] for the drag force. The actual velocity field, say \mathbf{u}_i , is the one induced by the rotation of \mathcal{S}_i , whereas \mathbf{u}_o , the velocity field induced by the rotation of \mathcal{S}_o , may be used for \mathbf{u}^* . Assuming that the fluid located in between the two surfaces rotates as a solid with the velocity field $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}$ implies that the associated dissipation rate is zero. This

immediately yields $T_i \leq T_o$, where T_i and T_o denote the torques associated with the rotation of \mathcal{S}_i and \mathcal{S}_o , respectively. Consider now a circular cylinder with $\chi = 1$. A sphere of diameter D may be entirely enclosed within the cylinder, while a sphere of diameter $2^{1/2}D$ completely encloses it. It follows that the torque T on the cylinder is such that $\pi\mu D^3\Omega \leq |T| \leq 2^{3/2}\pi\mu D^3\Omega$.

-
- [1] G. K. Batchelor. Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 44: 419–440, 1970.
 - [2] R. E. Khayat and R. G. Cox. Inertia effects on the motion of long slender bodies. *J. Fluid Mech.*, 209:435–462, 1989.
 - [3] G. Subramanian and D. L. Koch. Inertial effects on fibre motion in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 535:383–414, 2005.
 - [4] J. Einarsson, F. Candelier, F. Lundell, J.-R. Angilella, and B. Mehlig. Effect of weak fluid inertia upon Jeffery orbits. *Phys. Rev. E*, 91:041002, 2015.
 - [5] R. G. Cox. The steady motion of a particle of arbitrary shape at small Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 23: 625–643, 1965.
 - [6] D. Lopez and E. Guazzelli. Inertial effects on fibers settling in a vortical flow. *Phys. Rev. Fluids*, 2:024306, 2017.
 - [7] A. Roy, R. J. Hamati, L. Tierney, D. L. Koch, and G. A. Voth. Inertial torques and a symmetry breaking orientational transition in the sedimentation of slender fibres. *J. Fluid Mech.*, 875:576–596, 2019.
 - [8] S. C. R. Dennis, S. N. Singh, and D. B. Ingham. The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 101:257–279, 1980.
 - [9] G. Kirchhoff. *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik*. Teubner, 1876.
 - [10] E. Loth. Drag of non-spherical solid particles of regular and irregular shape. *Powder Technol.*, 182:342–353, 2008.
 - [11] P. R. Kry and R. List. Aerodynamic torques on rotating oblate spheroids. *Phys. Fluids*, 17:1087–1092, 1974.
 - [12] P. R. Kry and R. List. Angular motions of freely falling spheroidal hailstone models. *Phys. Fluids*, 17:1093–1102, 1974.
 - [13] M. Kharrouba, J.-L. Pierson, and J. Magnaudet. Flow structure and loads over inclined cylindrical rodlike particles and fibers. *Phys. Rev. Fluids*, under revision, 2021.
 - [14] G. Mougin and J. Magnaudet. The generalized Kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 28:1837–1851, 2002.
 - [15] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 284:97–135, 1995.
 - [16] J. B. Keller and S. I. Rubinow. Slender-body theory for slow viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 75:705–714, 1976.
 - [17] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Center for Turbulence Research Report CTR-S88, 1988.
 - [18] M. Shin, D. L. Koch, and G. Subramanian. A pseudospectral method to evaluate the fluid velocity produced by an array of translating slender fibers. *Phys. Fluids*, 18:063301, 2006.
 - [19] P. Gondret, M. Lance, and L. Petit. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Phys. Fluids*, 14:643–652, 2002.
 - [20] A. I. Korotkin. *Added Masses of Ship Structures*. Springer, 2009.
 - [21] R. Hill and G. Power. Extremum principles for slow viscous flow and the approximate calculation of drag. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 9:313–319, 1956.
 - [22] S. Kim and S. J. Karrila. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, 1991.

B. Bibliographie

- AUGUSTE, F. (2010). *Instabilités de sillage générées derrière un corps solide cylindrique, fixe ou mobile dans un fluide visqueux*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
- AUGUSTE, F., FABRE, D. et MAGNAUDET, J. (2010). Bifurcations in the wake of a thick circular disk. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 24:305–313.
- AUGUSTE, F., MAGNAUDET, J. et FABRE, D. (2013). Falling styles of disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 719:388–405.
- BATCHELOR, G. (1970). Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 44:419–440.
- CALMET, I. (1995). Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane. *Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse*.
- CHAN, P. C., LEU, R. J. et ZARGAR, N. H. (1986). On the solution for the rotational motion of an axisymmetric rigid body at low reynolds number with application to a finite length cylinder. *Chemical Engineering Communications*, 49(1-3):145–163.
- CHRUST, M., BOUCHET, G. et DUŠEK, J. (2010). Parametric study of the transition in the wake of oblate spheroids and flat cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 665:199–208.
- DENNIS, S., SINGH, S. et INGHAM, D. (1980). The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 101(2):257–279.
- DEREVICH, I., YEROSHENKO, V. et ZAICHIK, L. (1989). Hydrodynamics and heat transfer of turbulent gas suspension flows in tubes—1. hydrodynamics. *International journal of heat and mass transfer*, 32(12):2329–2339.
- DERKSEN, J. J. (2019). Liquid fluidization with cylindrical particles : Highly resolved simulations. *AIChE Journal*, 65.

- ERNI, P., CRAMER, C., MARTI, I., WINDHAB, E. J. et FISCHER, P. (2009). Continuous flow structuring of anisotropic biopolymer particles. *Advances in colloid and interface science*, 150:16–26.
- FABRE, D., AUGUSTE, F. et MAGNAUDET, J. (2008). Bifurcations and symmetry breaking in the wake of axisymmetric bodies. *Physics of Fluids*, 20:051702.
- FERNANDES, P. C., RISSO, F., ERN, P. et MAGNAUDET, J. (2007). Oscillatory motion and wake instability of freely rising axisymmetric bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 573:479–502.
- FONTAINE, E. (2014). *Masse des cristaux de glace et facteurs de réflectivité radar dans les systèmes de nuages convectifs de moyenne échelle formés dans les Tropiques et la région de la mer Méditerranée*. Thèse de doctorat.
- GAO, S., TAO, L., TIAN, X. et YANG, J. (2018). Flow around an inclined circular disk. *Journal of Fluid Mechanics*, 851:687–714.
- HOLM, R. (2005). *Fluid mechanics of fibre suspensions related to papermaking*. Thèse de doctorat, KTH.
- HOLM, R. et SÖDERBERG, D. (2007). Shear influence on fibre orientation. *Rheologica acta*, 46(5):721–729.
- INOUE, O. et SAKURAGI, A. (2008). Vortex shedding from a circular cylinder of finite length at low reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 20:033601.
- JOHNSON, T. et PATEL, V. (1999). Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, 378:19–70.
- KHAYAT, R. et COX, R. (1989). Inertia effects on the motion of long slender bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 209:435–462.
- LEGENDRE, D. (1996). Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique. *Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse*.
- LIU, R.-J., XIAO, R., YE, M. et LIU, Z. (2018). Analysis of particle rotation in fluidized bed by use of discrete particle model. *Advanced Powder Technology*, 29:1655–1663.
- LUNDELL, F., SÖDERBERG, L. D. et ALFREDSSON, P. H. (2011). Fluid mechanics of papermaking. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43:195–217.

- MAGARVEY, R. et BISHOP, R. L. (1961). Transition ranges for three-dimensional wakes. *Canadian Journal of Physics*, 39:1418–1422.
- MAGNAUDET, J., RIVERO, M. et FABRE, J. (1995). Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part 1. steady straining flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 284:97–135.
- MASLIYAH, J. H. (1972). Steady wakes behind oblate spheroids : Flow visualization. *The Physics of Fluids*, 15:1144–1146.
- MEMA, I., MAHAJAN, V. V., FITZGERALD, B. W. et PADDING, J. T. (2019). Effect of lift force and hydrodynamic torque on fluidisation of non-spherical particles. *Chemical Engineering Science*, 195:642–656.
- MORIOKA, S. et NAKAJIMA, T. (1987). Modeling of gas and solid particles 2-phase flow and application to fluidized-bed. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1):77–88.
- MOUGIN, G. et MAGNAUDET, J. (2002). The generalized kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 28:1837–1851.
- NATARAJAN, R. et ACRIVOS, A. (1993). The instability of the steady flow past spheres and disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 254:323–344.
- NORBERG, C. (1994). An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio. *Journal of Fluid Mechanics*, 258:287–316.
- NORBERG, C. (2001). Flow around a circular cylinder : aspects of fluctuating lift. *Journal of Fluids and Structures*, 15:459–469.
- OLSON, J. A., DELFEL, S., OLLIVIER-GOOCH, C. et GOODING, R. W. (2009). Computational fluid dynamics in the pulp and paper industry-the design of a high performance pulp screen rotor. *In Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries*, pages 1–8.
- ORMIÈRES, D. et PROVANSAL, M. (1999). Transition to turbulence in the wake of a sphere. *Physical Review Letters*, 83:80.
- OSEEN, C. W. (1910). Über die stokes’ sche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik. *Arkiv Mat., Astron. och Fysik*, 6:1.

- PIERSON, J.-L., AUGUSTE, F., HAMMOUTI, A. et WACHS, A. (2019). Inertial flow past a finite-length axisymmetric cylinder of aspect ratio 3 : Effect of the yaw angle. *Physical Review Fluids*, 4:044802.
- PIERSON, J.-L., KHARROUBA, M. et MAGNAUDET, J. (2021). Hydrodynamic torque on a steadily rotating slender cylinder. *arXiv preprint arXiv :2103.13097*.
- PROUDMAN, I. et PEARSON, J. (1957). Expansions at small reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2:237–262.
- PRUPPACHER, H. R. et KLETT, J. D. (2010). Microstructure of atmospheric clouds and precipitation. In *Microphysics of Clouds and Precipitation*, pages 10–73. Springer.
- PRZĄDKA, A., MIEDZIK, J., GUMOWSKI, K., GOJON-DURAND, S. et WESFREID, J. (2008). The wake behind the sphere ; analysis of vortices during transition from steadiness to unsteadiness. *Archives of Mechanics*, 60:467–474.
- RAMBERG, S. E. (1983). The effects of yaw and finite length upon the vortex wakes of stationary and vibrating circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 128:81–107.
- RIVERO, M. (1991). Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré. *Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse*.
- ROOS, F. W. et WILLMARTH, W. W. (1971). Some experimental results on sphere and disk drag. *AIAA journal*, 9:285–291.
- ROSENDAHL, L. (2000). Using a multi-parameter particle shape description to predict the motion of non-spherical particle shapes in swirling flow. *Applied Mathematical Modelling*, 24:11–25.
- SANJEEVI, S. K. et PADDING, J. T. (2017). On the orientational dependence of drag experienced by spheroids. *Journal of Fluid Mechanics*, 820.
- SAWATZKI, O. (1970). Das strömungsfeld um eine rotierende kugel. *Acta Mechanica*, 9:159–214.
- SCHEWE, G. (1983). On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical reynolds numbers. *Journal of fluid mechanics*, 133:265–285.
- SCHILLER, L. (1933). Über die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftaufbereitung. *Z. Vereines Deutscher Inge.*, 77:318–321.

- SEARS, W. (1948). The boundary layer of yawed cylinders. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 15:49–52.
- SHENOY, A. et KLEINSTREUER, C. (2008). Flow over a thin circular disk at low to moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 605:253–262.
- SIMONIN, O. (1991). Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées. *École de printemps de mécanique des fluides numériques, Aussois*.
- STOKES (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums.
- SZALTYS, P., CHRUST, M., PRZADKA, A., GOUJON-DURAND, S., TUCKERMAN, L. et WESFREID, J. (2012). Nonlinear evolution of instabilities behind spheres and disks. *Journal of Fluids and Structures*, 28:483–487.
- TAKAGI, H. (1977). Viscous flow induced by slow rotation of a sphere. *Journal of the Physical Society of Japan*, 42(1):319–325.
- TANEDA, S. (1956). Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low reynolds numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11:302–307.
- THOMPSON, M., HOURIGAN, K. et SHERIDAN, J. (1996). Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 12:190–196.
- TIAN, X., HU, Z., LU, H. et YANG, J. (2017). Direct numerical simulations on the flow past an inclined circular disk. *Journal of Fluids and Structures*, 72:152–168.
- TOUPOINT, C., ERN, P. et ROIG, V. (2019). Kinematics and wake of freely falling cylinders at moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 866:82–111.
- VAKIL, A. et GREEN, S. I. (2009). Drag and lift coefficients of inclined finite circular cylinders at moderate reynolds numbers. *Computers & Fluids*, 38:1771–1781.
- WEICKMANN, H. (1945). Formen und bildung atmosphaerischer eiskristalle. *Beitr. Phys. Atmos*, 28:12–52.
- WILLIAMSON, C. (1988). The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *The Physics of fluids*, 31(11):3165–3168.
- WILLIAMSON, C. (1992). The natural and forced formation of spot-like ‘vortex dislocations’ in the transition of a wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 243:393–441.

ZHAO, M., CHENG, L. et ZHOU, T. (2009). Direct numerical simulation of three-dimensional flow past a yawed circular cylinder of infinite length. *Journal of Fluids and Structures*, 25:831–847.